Produits infinis

F. Rouvière, décembre 99

Table des matières

1 Définitions **1**

2 Critères de convergence **2**

3 Premiers exemples **4**

4 Autres exemples **8**

5 Références **11**

Il s'agit de donner un sens aux expressions de la forme $P = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$, où les a_n sont des nombres (ou des fonctions) réels ou complexes. C'est bien sûr l'analogue (pour la multiplication) du problème des séries (pour l'addition), et $\prod$ se ramène en principe immédiatement à $\sum$ d'un coup de logarithme.

Mais des difficultés peuvent apparaître, qui obligent à une certaine prudence :

- cas où certains facteurs a_n s'annulent
- problèmes de détermination du logarithme complexe, dès lors que les a_n ne sont pas tous réels positifs.

1 Définitions

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{C}$. On dit que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

- *converge* (au sens large) s'il existe un nombre $P \in \mathbb{C}$ tel que les produits partiels
$$P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 a_2 \cdots a_N$$
tendent vers P quand $N \to \infty$;
- *converge strictement* si de plus $P \neq 0$.

De même que la convergence de $\sum u_n$ entraîne $u_n \to 0$, de même on a une *condition nécessaire de convergence stricte* : $a_n \neq 0$ pour tout n et $a_n \to 1$ quand $n \to \infty$. En effet la nullité d'un a_n entraînerait $P_N = 0$ pour tout $N \geq n$, et $P = 0$. Si $P \neq 0$, aucun a_n et aucun P_n ne sont donc nuls, et on a

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1 \ .$$

On note désormais

$$a_n = 1 + u_n \ .$$

2 Critères de convergence

Théorème 1 *(Cas u_n de signe constant ; [T] p.14) Si tous les u_n sont réels* positifs, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) le produit infini $\prod_1^\infty (1+u_n)$ converge strictement
(ii) la série $\sum_1^\infty \ln(1+u_n)$ converge
(iii) la série $\sum_1^\infty u_n$ converge.
Même résultat si tous les u_n appartiennent à l'intervalle $]-1,0]$.

Preuve. La fonction ln est un isomorphisme et un homéomorphisme du groupe multiplicatif $]0,\infty[$ sur le groupe additif $\mathbb{R}$, d'où l'équivalence des propriétés (i) et (ii).
Si $\sum \ln(1+u_n)$ converge, ou si $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0 d'où $\ln(1+u_n) \sim u_n$ lorsque $n \to \infty$. La convergence de $\sum \ln(1+u_n)$ équivaut donc à celle de $\sum u_n$, d'après la règle des équivalents pour les séries à termes de signe constant, d'où l'équivalence des propriétés (ii) et (iii).
Remarque. L'équivalence de (i) et (ii) reste valable pour des u_n complexes (tous $\neq -1$). La preuve, plus délicate, s'obtient en examinant avec soin les questions liées à la détermination choisie du logarithme complexe ([T] p.16). L'équivalence avec (iii) n'est plus valable dans ce cas (Exemple 5 ci-dessous). L'énoncé suivant pourra suffire en pratique.

Théorème 2 *(Cas u_n complexes ; [D] p.267, [T] p.15) La* convergence absolue *de la série $\sum_1^\infty u_n$ (i.e. $\sum_1^\infty |u_n| < \infty$) entraîne la convergence du produit infini $\prod_1^\infty (1+u_n)$ (strictement si de plus $u_n \neq -1$ pour tout n). La réciproque est fausse.*

Théorème 3 *(Cas de fonctions u_n sur un ensemble X, à valeurs complexes ; [T] p.18, [R] Th.15.4) La* convergence normale *sur X de $\sum_1^\infty u_n(x)$ (c'est-à-dire $\sum_1^\infty \sup_{x\in X} |u_n(x)| < \infty$) entraîne la* convergence uniforme *sur X du produit infini $\prod_1^\infty (1+u_n(x))$, i.e. $P_N(x) \to P(x)$ uniformément sur X. La convergence est stricte si de plus $u_n(x) \neq -1$ pour tout n et tout $x \in X$.*

Corollaire 4 *(Cas holomorphe ; [D] p.268, [R] Th.15.6, ou [CA] p.161) Si les u_n sont des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, la* convergence normale sur tout compact *de Ω de la série $\sum_1^\infty u_n(z)$ entraîne la* convergence uniforme sur tout compact *de Ω du produit infini $P(z) = \prod_1^\infty (1+u_n(z))$. La fonction P est holomorphe sur Ω, et l'ensemble de ses zéros est la réunion des ensembles de zéros de ses facteurs $1+u_n(z)$.*

Preuve du théorème 2 (par le logarithme complexe). L'hypothèse entraîne $u_n \to 0$; les points $1+u_n$ sont donc voisins de 1 pour n assez grand, ce qui permet d'utiliser la détermination principale ln du logarithme complexe (primitive de $1/z$ dans le plan fendu selon l'axe réel négatif). Comme $\ln(1+z)/z$ tend vers 1 (dérivée de ln en 1) quand z tend vers 0 , il existe C et $r \in]0,1[$ tels que

$$|z| \leq r \text{ entraîne } |\ln(1+z)| \leq C|z| \ .$$

En majorant le module de la série du logarithme, on verrait qu'on peut choisir $r = 1/2$ et $C = 2\ln 2$, mais c'est sans importance.
Il existe N tel que $|u_n| \leq r$ pour $n \geq N$, d'où $|\ln(1+u_n)| \leq C|u_n|$ et la convergence absolue de la série $\sum_N^\infty \ln(1+u_n)$. En passant à l'exponentielle (application continue

de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}\setminus 0$), on en déduit la convergence stricte de $\prod_N^\infty(1+u_n)$, et finalement la convergence de $\prod_1^\infty(1+u_n)$ (stricte si aucun des N premiers facteurs n'est nul). Un contre-exemple à la réciproque est donné plus bas (Exemple 5).
Remarque. On n'a utilisé ici que les égalités $\exp(\ln z) = z$ et $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$, qui ne soulèvent aucune difficulté. Mais on prendra garde que les "égalités" $\ln(\exp z) = z$ (?), $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (?) ne sont valables qu'à l'addition près d'un multiple près de $2i\pi$...

Preuve du théorème 3 (sans logarithmes). Par hypothèse $|u_n(x)| \leq a_n$ pour tous n et x, avec $\sum_1^\infty a_n < \infty$. Soit

$$P_N(x) = \prod_1^N (1+u_n(x)) \ .$$

On a

$$\begin{aligned} |P_N(x) - P_{N-1}(x)| &= |u_N(x)P_{N-1}(x)| \leq a_N \prod_1^{N-1}(1+a_n) \\ &\leq a_N \prod_1^\infty (1+a_n) = Ca_N \ , \end{aligned}$$

où le produit infini converge d'après le théorème 1. Par suite la série

$$\sum_{N=2}^\infty (P_N(x) - P_{N-1}(x))$$

converge normalement sur X, et la suite des $P_N(x)$ converge donc uniformément sur X vers une limite $P(x)$.
Pour établir la convergence stricte lorsque $u_n(x) \neq -1$ pour tous n et x, on doit montrer que $P(x)$ ne s'annule jamais. Or

$$\frac{1}{P_N(x)} = \prod_1^N \frac{1}{1+u_n(x)} = \prod_1^N (1+v_n(x))$$

en notant $v_n(x) = -u_n(x)/(1+u_n(x))$, et

$$|v_n(x)| \leq \frac{a_n}{1-a_n} \leq 2a_n$$

si n est assez grand pour que $a_n \leq 1/2$. Le produit $\prod_1^\infty(1+v_n(x))$ est donc convergent d'après la première partie de la démonstration ; soit $Q(x)$ sa valeur. On a donc

$$P(x)Q(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{P_N(x)}{P_N(x)} = 1 \ ,$$

et P ne s'annule jamais.
Remarque. Bien entendu le théorème 3 entraîne le théorème 2 (cas des fonctions constantes), dont on a ainsi une nouvelle preuve, sans logarithmes.

Exemple 5 *Contre-exemples ([D] p.275-276).*
(i) Pour $u_n = (-1)^n/n$, resp. $(-1)^n/\sqrt{n}$, on a $\prod_2^\infty(1+u_n) = 1$, resp. 0, mais $\sum_2^\infty u_n$ est semi-convergente.
(ii) Pour $u_{2n-1} = -(1/\sqrt{n})$, $u_{2n} = (1/\sqrt{n}) + (1/n)$, le produit $\prod_2^\infty(1+u_n)$ converge strictement, mais $\sum_1^\infty u_n$ diverge.
Pour des u_n de signe variable, la convergence (même stricte) de $\prod(1+u_n)$ n'entraîne donc pas la convergence de $\sum |u_n|$, pas même celle de $\sum u_n$.

(i) Pour $u_n = (-1)^n/n$, il suffit d'observer que

$$(1 + u_{2n})\,(1 + u_{2n+1}) = 1$$

d'où, en groupant deux par deux les facteurs consécutifs, $\prod_2^{2N+1} = 1$ et $\prod_2^{2N} = 1 + \frac{1}{2N}$. Par suite, les produits partiels $\prod_2^N$ tendent vers 1.
Pour $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, on a $1 + u_n > 0$ pour tout $n \geq 2$, et on peut utiliser le logarithme réel. Le développement limité

$$\ln(1 + u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1 + \varepsilon(n)}{2n} \ ,$$

avec $\lim \varepsilon(n) = 0$, donne $\lim_{N\to\infty} \sum_2^N \ln(1 + u_n) = -\infty$. Par la continuité de l'exponentielle on en déduit la convergence du produit infini vers 0.
(ii) En observant que

$$(1 + u_{2n-1})(1 + u_{2n}) = 1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } u_{2n-1} + u_{2n} = \frac{1}{n} \ ,$$

on conclut facilement à la convergence stricte de $\prod(1 + u_n)$ (Théorème 1 ou 2) et à la divergence de $\sum u_n$.

3 Premiers exemples

Exemple 6

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \ .$$

En effet

$$P_N = \prod_2^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_2^N \frac{(n+1)/n}{n/(n-1)} = \frac{(N+1)/N}{2/1} = \frac{N+1}{2N} \to \frac{1}{2} \ ,$$

et le produit converge strictement.

Exemple 7

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi} \ .$$

Le théorème 1 (ou 2) assure la convergence stricte du produit, et sa valeur se déduit des intégrales de Wallis $I_k = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k \, dx$.
En effet $kI_k = (k-1)I_{k-2}$ pour $k \geq 2$ (intégrer par parties) d'où, en prenant $k = 2n$ ou $k = 2n + 1$,

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{(2n-1)/2n}{2n/(2n+1)} = \frac{I_{2n}/I_{2n-2}}{I_{2n+1}/I_{2n-1}} = \frac{I_{2n}/I_{2n+1}}{I_{2n-2}/I_{2n-1}}$$

pour $n \geq 1$. Par simplifications en cascade il vient

$$\prod_1^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{I_{2N}/I_{2N+1}}{I_0/I_1} = \frac{2}{\pi} \frac{I_{2N}}{I_{2N+1}} \ .$$

Or $I_{2N+2} \leq I_{2N+1} \leq I_{2N}$ d'après la définition des I_k, d'où

$$\frac{I_{2N+2}}{I_{2N}} = \frac{2N+1}{2N+2} \leq \frac{I_{2N+1}}{I_{2N}} \leq 1 \ .$$

Ceci montre que I_{2N+1}/I_{2N} tend vers 1 quand N tend vers l'infini, d'où le résultat. Cet exemple est généralisé par le suivant.

Exemple 8 *([VA] p.42 et 56, [MVT] p.11)*

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \ \textit{pour tout } z \in \mathbb{C} \ .$$

Cette égalité, due à Euler[1], redonne celle de l'Exemple 7. Elle met en évidence les zéros bien connus $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ de la fonction sinus.
Pour une preuve élémentaire, i.e. sans théorie des fonctions holomorphes, on part de l'égalité

$$e^z = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{z}{2k}\right)^{2k} \ ,$$

d'où

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \lim_{k\to\infty} P_k(z) \ ,$$

en notant P_k le polynôme

$$P_k(z) = (2i)^{-1}\left[\left(1 + i\frac{z}{2k}\right)^{2k} - \left(1 - i\frac{z}{2k}\right)^{2k}\right] \ ,$$

de degré $2k-1$. Pour obtenir une "factorisation infinie" de $\sin z$, il est donc naturel de factoriser d'abord chaque P_k. Un calcul facile, utilisant les racines $2k$-èmes de l'unité, montre que les racines de P_k sont les $2k-1$ nombres $z = 2k \operatorname{tg}(n\pi/2k)$, avec n entier et $-(k-1) \leq n \leq k-1$. On peut alors factoriser P_k, d'où

$$\sin z = z \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k-1} (1 + u_n(k,z)) \ , \text{ avec } u_n(k,z) = -\left(\frac{z}{2k \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2k}}\right)^2$$

(on a tenu compte de l'égalité $P_k'(0) = 1$ pour obtenir le facteur constant). Cela s'écrit aussi

$$\sin z = z \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(k,z)) \ ,$$

en notant $u_n(k,z) = 0$ si $n \geq k$. Comme $\lim_k u_n(k,z) = -(z\,/\,n\pi)^2$ pour chaque $n \geq 1$, le résultat s'obtiendra en passant à la limite sous le signe $\prod$, ce qui se justifie aisément : pour chaque z fixé, le produit infini $\prod_n (1 + u_n(k,z))$ converge uniformément par rapport au paramètre $k \geq 1$, d'après l'inégalité $|u_n(k,z)| \leq |z|^2/n^2\pi^2$ et le théorème 3.
Voir [CA] p.162 pour une autre preuve de la formule d'Euler, à partir de l'étude d'une série de fonctions méromorphes.
Remarque. Un calcul *formel* fulgurant (dû à Euler) permet d'en déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_1^\infty 1/n^2$: on a d'une part le développement en série bien connu

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \cdots\right)$$

[1] Leonhard Euler (1707-1783), grand Suisse.

et d'autre part le produit infini

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

En identifiant les coefficients de $-z^3$ dans ces deux expressions, on obtient

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots \text{ , soit } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(calcul *formel*, répétons-le).

Exemple 9 *([VA] p.59, [HW] p.246 et 350, [CL] p.119) La fonction ζ de Riemann*[2] *est donnée par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} \text{ , \textit{pour} } \operatorname{Re} s > 1 \text{ ,}$$

où p_n est le n-ème nombre premier : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$

En effet $|n^{-s}| = n^{-\operatorname{Re} s}$, d'où la convergence absolue de la série. D'autre part l'inégalité (évidente) $p_n \geq n$ donne $|p_n^{-s}| \leq n^{-\operatorname{Re} s}$, d'où la convergence stricte de $\prod (1 - p_n^{-s})$ (Théorème 2 ou 3) et celle de son inverse.
Or, par produit de séries absolument convergentes on a, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{ks}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3^{ls}} = \sum_{k,l \geq 0} \frac{1}{(2^k 3^l)^s} \\ &= \sum \frac{1}{m^s} \text{ ,}\end{aligned}$$

où la dernière somme est étendue à tous les entiers m dont les seuls facteurs premiers sont 2 et 3. Plus généralement, pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$P_N(s) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq N}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum \frac{1}{m^s} \text{ ,} \tag{1}$$

somme étendue aux entiers m dont tous les facteurs premiers sont $\leq N$. On en déduit que, pour $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta(s) - P_N(s) = \sum \frac{1}{m^s} \text{ ,}$$

somme étendue aux entiers m dont au moins un facteur premier est $> N$ (donc $m \geq N + 1$ évidemment). Par suite

$$|\zeta(s) - P_N(s)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{|m^s|} = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{m^{\operatorname{Re} s}} \text{ ,}$$

ce qui tend vers 0 quand $N \to \infty$, d'où le résultat.
Remarque. De (1) on déduit aussi que

$$P_N(1) \geq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \text{ ,}$$

d'où la divergence du produit $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$.

[2] Bernhard Riemann, 17.9.1826 - 20.6.1866.

Exemple 10 *([D] p.292, [CA] p.162, [CL] p.113, [MVT] p.12) L'inverse de la fonction Γ d'Euler se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$, et*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \ , \ z \in \mathbb{C} \ ,$$

où $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ *est la constante d'Euler.*

Montrons d'abord la convergence du produit infini. On a ici

$$u_n(z) = e^{-z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right) - 1 = -e^{-z/n} \left(e^{z/n} - 1 - \frac{z}{n}\right) \ .$$

Or le développement de Taylor de l'exponentielle à l'origine montre que, pour $w \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{w\to 0} \frac{1}{w^2} e^{-w} \left(e^w - 1 - w\right) = \frac{1}{2} \ .$$

Il existe donc $\alpha > 0$ tel que

$$|u_n(z)| \leq \frac{|z|^2}{n^2} \text{ pour } \frac{|z|}{n} \leq \alpha \ ,$$

d'où la convergence du produit infini, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ (Corollaire 4). Dans l'égalité à démontrer, le membre de droite est donc une fonction entière sur $\mathbb{C}$, dont les seuls zéros sont $0, -1, \ldots, -n, \ldots$
D'autre part la fonction Γ est définie, pour $\operatorname{Re} z > 0$, par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \ .$$

Pour $N \geq 1$ soit χ_N la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, N]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée aux fonctions

$$f_N(t) = \chi_N(t) \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1}$$

(car $|f_N(t)| \leq e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1}$ pour $t > 0$), d'où

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1} \, dt \ .$$

Ces dernières intégrales se calculent en intégrant par parties, ce qui donne (pour $\operatorname{Re} z > 0$)

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{A_N(z)} \ , \text{ avec } A_N(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+N)}{N! N^z} \ .$$

Pour aller vers l'expression annoncée de $1/\Gamma(z)$ comme produit infini, on observe que

$$A_N(z) = zN^{-z} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

et que

$$N^{-z} = \exp(-z \ln N) = \exp z \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N\right) \cdot \prod_{n=1}^{N} \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \ .$$

En introduisant la constante d'Euler $\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N\right)$ on obtient donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{N\to\infty} A_N(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-z/n}\left(1 + \frac{z}{n}\right) .$$

Cette expression permet donc de prolonger $1/\Gamma(z)$ en une fonction entière sur $\mathbb{C}$.
Remarque. Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} A_N(z)A_N(1-z) &= \frac{z(1+z)(2+z)\cdots(N+z)}{N!N^z}\frac{(1-z)(2-z)\cdots(N-z)(N+1-z)}{N!N^{1-z}} \\ &= z\left(1+\frac{1-z}{N}\right)\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) . \end{aligned}$$

En joignant les résultats des Exemples 8 et 10 on obtient donc la *formule des compléments*

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \ , \ z \in \mathbb{C} \ .$$

4 Autres exemples

Exemple 11

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right| \ \textit{et} \ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right) .$$

D'une part

$$\left|1+\frac{i}{n}\right| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1+\varepsilon(n)}{2n^2} \ ,$$

d'où la convergence stricte de $\prod_1^\infty \left|1+\frac{i}{n}\right|$ d'après le théorème 1.
D'autre part, la détermination principale du logarithme complexe donne

$$\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n} - \frac{1+\varepsilon(n)}{n^2} \ ,$$

terme général d'une série divergente. Voyons directement ce qui se passe. Lorsqu'on multiplie les facteurs

$$1+\frac{i}{n} = \left|1+\frac{i}{n}\right| e^{i\theta_n} \ , \text{ avec } \theta_n = \arctan\frac{1}{n} \ ,$$

les arguments θ_n s'ajoutent, mais forment une série divergente (car $\theta_n \sim 1/n$). Le point $P_N = \prod_1^N \left(1+\frac{i}{n}\right)$ tourne donc indéfiniment dans le plan complexe, et se rapproche en spirale du cercle asymptote de rayon $R = \prod_1^\infty \left|1+\frac{i}{n}\right|$. Le produit $\prod_{n=1}^\infty \left(1+\frac{i}{n}\right)$ diverge.
La convergence de $\prod |a_n|$ n'entraîne donc pas celle de $\prod a_n$!
Remarques anecdotiques. On peut préciser le dessin des points P_N en observant que

$$P_N = \left(1+\frac{i}{N}\right)P_{N-1} = P_{N-1} + \frac{i}{N}P_{N-1} \, ;$$

le triangle $OP_{N-1}P_N$ est donc rectangle en P_{N-1}. Au passage on peut noter que $P_3 = 5i/3$ (par calcul direct), d'où l'égalité $\arctan 1 + \arctan(1/2) + \arctan(1/3) =$

$\pi/2$! Enfin, en utilisant le résultat de l'Exemple 8 ci-dessus, le rayon R du cercle asymptote est donné par

$$R^2 = \prod_1^\infty \left|1 + \frac{i}{n}\right|^2 = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sin(i\pi)}{i\pi} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \ ,$$

d'où $R = 1,91731...$

Exemple 12 *([D] p.276)*

$$\prod_{n=1}^\infty (1 + z^n) = \prod_{n=1}^\infty \frac{1}{1 - z^{2n-1}} \ \textit{pour } |z| < 1 \ .$$

En effet

$$\begin{aligned}\prod_1^N (1 - z^{2n-1}) \prod_1^N (1 + z^n) \prod_1^N (1 - z^n) &= \prod_1^N (1 - z^{2n-1})(1 - z^{2n}) \\ &= \prod_1^{2N} (1 - z^n) \ ,\end{aligned}$$

d'où

$$\prod_1^N (1 - z^{2n-1}) \prod_1^N (1 + z^n) = \prod_{N+1}^{2N} (1 - z^n) \ ,$$

et le résultat pour $N \to \infty$.

Exemple 13 *([HW] p.274 et 284, [PS] p.10)*

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^\infty \frac{1}{1 - z^n} &= 1 + \sum_{n=1}^\infty p(n)\, z^n \ , \ |z| < 1 \ \textit{(Euler)}, \\ \prod_{n=1}^\infty (1 - z^n) &= \sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n z^{n(3n+1)/2} \ , \ |z| < 1 \ \textit{(Euler)}.\end{aligned}$$

Dans la première égalité $p(n)$ désigne le *nombre de partitions* de l'entier n comme somme d'entiers ≥ 1 ; par exemple

$$\begin{aligned}5 &= 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \ , \text{ d'où } p(5) = 7 \ .\end{aligned}$$

Dans la seconde on notera que les exposants $n(3n + 1)/2$, $n \in \mathbb{Z}$, sont des entiers ≥ 0, deux à deux distincts. Cette égalité résulte de la belle formule de Jacobi

$$\prod_{n=1}^\infty \left(1 - q^{2n}\right)\left(1 + q^{2n-1}w\right)\left(1 + q^{2n-1}w^{-1}\right) = \sum_{n=-\infty}^\infty q^{n^2} w^n \ , \ |q| < 1, w \neq 0 \ ,$$

en remplaçant q par $z^{3/2}$ et w par $-z^{-1/2}$. Pour les démonstrations voir les références citées, où l'on trouvera bien d'autres merveilles.

Exemple 14 *Produit infini de Weierstrass ([R] Th.15.10) Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}$, dont les zéros (éventuellement répétés selon leurs multiplicités) sont*

$$0 \text{ (k fois) }, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

rangés par modules croissants : $0 < |z_1| \leq \cdots \leq |z_n| \leq \cdots$, avec $|z_n| \to \infty$. Alors il existe une fonction entière φ sur $\mathbb{C}$, et une suite (p_n) d'entiers naturels, telles que

$$f(z) = z^k e^{\varphi(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) E\left(p_n, \frac{z}{z_n}\right)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, en notant $E(p, w) = \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \cdots + \frac{w^p}{p}\right)$.

Cette "factorisation infinie" de f, qui généralise celles des Exemples 8 et 10, met en évidence les zéros de f et leurs multiplicités, puisque les facteurs exponentiels e^{φ} et $E(p_n, z/z_n)$ ne s'annulent jamais. Les facteurs E n'ont qu'un rôle "technique", celui d'assurer la convergence du produit infini (par un choix convenable des p_n) sans introduire de nouveaux zéros. Voir les détails dans [R].

Exemple 15 *Application aux suites récurrentes ([DB] p.151) Soit f une fonction holomorphe dans le disque $|z| < R$. On suppose $f(0) = 0$ et $0 < |f'(0)| < 1$. Alors il existe une fonction φ, holomorphe dans un disque $|z| < r$, telle que $\varphi'(0) = 1$ et*

$$\varphi(f(z)) = f'(0) \cdot \varphi(z) \text{ pour } |z| < r\ .$$

L'intérêt de cette question vient de son lien avec l'étude de la suite récurrente $z_n = f(z_{n-1})$, de point de départ z_o : si on connaît une fonction φ, bijective, telle que

$$\varphi(f(z)) = a\varphi(z)$$

(où a est une constante), on a immédiatement $z_n = \varphi^{-1}(a^n \varphi(z_o))$. Noter que, si $f(0) = 0$ et si les fonctions sont dérivables, on a nécessairement $\varphi'(f(z))f'(z) = a\varphi'(z)$, d'où $f'(0) = a$ si $\varphi'(0) \neq 0$. Un exemple de cette situation est

$$f(z) = \frac{z}{1 + \sqrt{1 + z^2}}\ ,\ \varphi(z) = \arctan z\ ,\ a = \frac{1}{2}\ ;$$

si $z_o = \operatorname{tg}\theta$, avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, la récurrence se résout en $z_n = \operatorname{tg}(\theta/2^n)$.
La fonction φ est malheureusement impossible à expliciter en général, mais son existence peut être établie selon les indications suivantes.

On note $a = f'(0)$, k un nombre tel que $0 < |a| < k < 1$ et, comme précédemment, $z_{n+1} = f(z_n)$.
1. Montrer qu'il existe $r \in]0, R[$ tel que $0 < |f(z)| \leq k|z|$ pour $0 < |z| \leq r$. En déduire $|z_n| \leq k^n |z_o|$ si $|z_o| \leq r$.
2. Établir la convergence du produit infini $\prod_0^{\infty} (f(z_n)/az_n)$ pour $0 < |z_o| \leq r$.
[Son terme général est de la forme $1 + u_n$, avec $u_n = (z_n/a) \sum_{p=2}^{\infty} a_p z_n^{p-2}$, d'où facilement $|u_n| \leq Ck^n$.]
3. En déduire qu'on peut définir φ par

$$\varphi(z_o) = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{a^n}\ ,\ \text{i.e. } \varphi(z_o) = z_o \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} \frac{z_{n+1}}{z_n} \text{ si } 0 < |z_o| \leq r\ ,\ \text{et } \varphi(0) = 0\ .$$

Voir [DE] pour une autre méthode de construction de φ, par une série entière formelle dont la convergence est établie grâce à une série majorante.

5 Références

[D] DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, p.266-269
[R] RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, début du chapitre 15
[T] TITCHMARSH, *The theory of functions*, p.13-19

et aussi

[CA] CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, p.160-164
[CL] CHAMBERT-LOIR et FERMIGIER, *Exercices d'analyse*, tome 2, p.113, 119, 128
[CH] CHOQUET, *Topologie*, p.228-235 et 291-293
[DB] DE BRUIJN, *Asymptotic methods in analysis*, Dover 1981, p.151
[DE] DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd edition, Addison-Wesley 1989, p.276-280
[HW] HARDY et WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, p.246, 350, et chapitre 19
[MVT] MOISAN, VERNOTTE et TOSEL, *Suites et séries de fonctions*, p. 12, 86
[PS] PÓLYA et SZEGÖ, *Problems and theorems in analysis*, tome 1, 1ère partie, chapitre 1
[VA] VALIRON, *Théorie des fonctions*, p.52-59.