SUITES ET SÉRIES (panorama)

Objectifs. Rechercher si une *suite* converge vers une limite : $x_n \to a$. Si oui, à quelle vitesse (ordre de grandeur de la distance de x_n à a, comment choisir n pour qu'elle soit inférieure à 10^{-9}...) ? Si non, que dire du comportement asymptotique des x_n quand n tend vers l'infini, de leur répartition dans l'espace... ? Il n'y a pas que les suites convergentes dans la vie ! Le comportement chaotique de certaines suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$ est beaucoup plus riche en questions profondes (et en applications) qu'une banale convergence vers un point fixe de f.

Étudier la *série* de terme général u_n c'est étudier la suite de ses *sommes partielles* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, donc se poser les questions précédentes à propos des S_n. Inversement on retrouve les u_n connaissant les S_n par $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$. Ce passage est si facile qu'il pourrait sembler inutile de consacrer de longs chapitres aux séries, simple application des suites. Pourtant certaines règles spécifiques portant sur u_n plutôt que S_n (d'Alembert, Cauchy, Abel, séries alternées, etc.) sont d'un usage très commode, bien plus qu'une étude directe de la lourde expression S_n.

Si, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on remplaçait addition par multiplication, on serait conduit à étudier la convergence des produits partiels $P_n = u_0 u_1 \cdots u_n$. La fonction logarithme ramène en principe à l'étude de la série $\sum \ln u_n$, mais les problèmes liés au logarithme complexe soulèvent quelques difficultés. Sur ces *produits infinis*, dont on ne parlera pas ici, voir par exemple le panorama [R].

Le cadre. Pour étudier les *suites* un cadre naturel est celui d'un espace métrique. En pratique ce n'est bien souvent que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec la distance définie par la valeur absolue (ou le module). Les notions de suite croissante, de suites adjacentes, de $\limsup$ et $\liminf$, qui se réfèrent à une relation d'ordre, n'ont de sens que sur $\mathbb{R}$.

Pour les *séries* on a besoin aussi d'une structure additive, et le cadre naturel est celui d'un espace normé (réel ou complexe). Ce sera bien souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

SUITES

Soit X un espace métrique. On appelle *suite* de X une application $x : \mathbb{N} \to X$, soit $n \mapsto x_n$. On écrit aussi $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, ..., x_n, ...)$. On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de x toute suite y obtenue en composant $n \mapsto x_n$ avec une application strictement croissante $k \mapsto n_k$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, soit $y_k = x_{n_k}$.

1. Cas général, valeurs d'adhérence ([G] p.19, [TM] p.68)

Proposition 1 *Soient (x_n) une suite d'un espace métrique X et a un point de X. Sont équivalentes :*

(i) a est limite d'une suite extraite de (x_n)

(ii) tout voisinage de a contient une infinité de termes[1] *de la suite (x_n)*

(iii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, a est adhérent à l'ensemble $A_p = \{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ...\}$.

On dit alors que a est une valeur d'adhérence *de la suite (x_n).*

[1] Autrement dit : pour tout voisinage V de a, l'ensemble des n tels que $x_n \in V$ est infini.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de $x = (x_n)$ est donc le *fermé* (éventuellement vide)

$$A = \bigcap_{p=0}^{\infty} \overline{A_p} \ .$$

Ne pas confondre ensemble des valeurs d'adhérence et adhérence de l'ensemble des valeurs... (voir une suite convergente). On a en fait $\overline{A_0} = A_0 \cup A$ ([LFA] p.79).
Exemples.
Si $x_n \to a$, alors $A = \{a\}$.
La suite $x_n = n$ donne $A = \varnothing$ dans $\mathbb{R}$, mais $A = \{+\infty\}$ dans[2] $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
Dans $\mathbb{R}$ la suite $x = \left(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, ...\right)$ n'a qu'une valeur d'adhérence ($A = \{0\}$), mais ne converge pas. Dans $\overline{\mathbb{R}}$ on aurait $A = \{0, +\infty\}$ pour cette même suite.
Dans $\mathbb{R}$ la suite des rationnels donne $A = \mathbb{R}$, puisque tout réel est limite de la suite de ses approximations décimales.
Dans $\mathbb{R}$ la suite $x_n = \sin n$ donne $A = [-1, +1]$ (voir Exercice 3.3).
Dans $\mathbb{C}$, pour la suite $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{in}$, A est le cercle unité.

Les différences entre $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ sont liées à la compacité de ce dernier : un espace *métrique* X est *compact* si et seulement si toute suite de X admet au moins une valeur d'adhérence, i.e. de toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergente. C'est la *propriété de Bolzano-Weierstrass* (théorème ou définition, selon la présentation choisie de la compacité).

Dans un espace *métrique compact*, une suite converge vers a si et seulement si elle admet a comme unique valeur d'adhérence ([G] p.30).

Par définition même, dans un espace *métrique complet* (muni d'une distance d) une suite converge si et seulement si c'est une *suite de Cauchy*, i.e. $d(x_p, x_q) \to 0$ quand p et q tendent vers l'infini. Tout espace métrique compact est complet (conséquence facile de Bolzano-Weierstrass).

2. Cas des suites réelles, $\limsup$ et $\liminf$ ([TM] p.76-80, [LFA] p.39-44, [ZQ] chap.1)

Ici intervient la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ (ou de $\overline{\mathbb{R}}$). La suite (x_n) est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout n.

Toute suite de $\mathbb{R}$ croissante et majorée est convergente. Toute suite de $\mathbb{R}$ croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute suite croissante est convergente. Idem, mutatis mutandis, avec les suites décroissantes.

Deux suites réelles x et y sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence tend vers 0, i.e.

$$x_0 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \cdots \leq y_0 \text{ et } y_n - x_n \to 0 \ .$$

Les $[x_n, y_n]$ sont alors des segments emboîtés et les deux suites convergent vers la même limite.
Exemple : les approximations décimales, par excès et par défaut, d'un nombre reél.

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ l'ensemble $A_p = \{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ...\}$ admet une borne supérieure $\sup A_p = \sup_{n \geq p} x_n$ (éventuellement $+\infty$) et une borne inférieure $\inf A_p = \inf_{n \geq p} x_n$ (éventuellement $-\infty$). Les $\sup A_p$ (resp. $\inf A_p$) forment une suite décroissante (resp. croissante) dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'où la première partie du

Théorème 2 *Pour toute suite (x_n) de $\mathbb{R}$ on peut définir dans $\overline{\mathbb{R}}$ sa limite supérieure L et sa limite inférieure ℓ par*

$$L = \limsup x_n = \lim_{p \to \infty} \left(\sup_{n \geq p} x_n\right) \ , \ \ell = \liminf x_n = \lim_{p \to \infty} \left(\inf_{n \geq p} x_n\right) \ .$$

Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$. On a $\ell \leq L$, $\ell \in A$, $L \in A$ et $A \subset [\ell, L]$; ℓ est donc la plus petite valeur d'adhérence de (x_n) et L la plus grande.
La suite (x_n) converge vers une limite a dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\ell = L = a$.

[2] On définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Donc arctan est une isométrie de $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ sur $[-\pi/2, +\pi/2]$ muni de la distance usuelle.

Réfléchir à la position des x_n par rapport à ℓ et L (en supposant par exemple ces deux nombres finis, $-\infty < \ell \leq L < \infty$) : pour tout $\varepsilon > 0$ les x_n inférieurs à $\ell - \varepsilon$, resp. supérieurs à $L + \varepsilon$, sont en nombre fini ; chacun des intervalles $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $[L + \varepsilon, L + \varepsilon]$ contient une infinité de x_n ; entre $\ell + \varepsilon$ et $L - \varepsilon$ il peut y avoir un nombre fini ou infini de x_n.
Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\limsup x_n < a$ entraîne $x_n < a$ à partir d'un certain rang, et $\limsup x_n > a$ entraîne qu'une infinité de x_n sont $> a$.
Formulaire

$$\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$$
$$\text{si } x_n \leq y_n \text{ (à partir d'un certain rang), alors } \limsup x_n \leq \limsup y_n$$
$$\liminf x_n + \limsup y_n \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

Les inégalités de la dernière ligne sont donc des égalités si (x_n) est une suite convergente.

Sur les *suites récurrentes* $x_{n+1} = f(x_n)$ voir [TM] chap.6 ou, pour aller plus loin, le beau livre de Devaney, *A first course in chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley 1992.

3. Exercices sur les suites

3.1. *Approximations rationnelles d'un irrationnel* ([G] p. 199). Soit $r_n = p_n/q_n$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \geq 1$, une suite de rationnels qui converge vers un nombre irrationnel x. Montrer que p_n et q_n tendent vers l'infini.
3.2. *Une superpuissance* ([TM] p.350). On donne un réel $a > 1$. Montrer qu'on peut donner un sens à l'expression $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ si et seulement si $a \leq e^{1/e}$. Calculer cette expression pour $a = \sqrt{2}$.
3.3. *La suite* $(\sin n\theta)$ ([G] p.199). On suppose θ/π irrationnel.

a. Montrer que la suite des $x_n = \sin n\theta$ n'est pas convergente. [On pourra considérer $x_{n+1} \pm x_{n-1}$.]

b. Montrer que la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$. [On pourra montrer d'abord que les $e^{in\theta}$ sont denses sur le cercle unité.]

3.4. *Recherche de limite* ([ZQ] p.8). On étudie la suite de terme général $x_n = \sqrt[n]{|\sin n\pi\alpha|}$, où α est un réel donné.

a. On prend d'abord $\alpha = \sqrt{2}$. Établir l'inégalité

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{4q^2}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, avec $q \neq 0$. [On pourra multiplier par $\sqrt{2} + \frac{p}{q}$.]

b. Déduire de **a** (avec $\alpha = \sqrt{2}$) que

$$x_n \geq \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$$

et que $\lim x_n = 1$.

3.5. *Moyenne arithmético-géométrique* ([G] p.201). Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par récurrence selon

$$a_0 > 0, b_0 > 0 \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \ , \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ .$$

Montrer qu'elles sont adjacentes.

3.6. *Valeurs d'adhérence et suites récurrentes* ([TM] p.75 et 351).

a. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite *bornée* de $\mathbb{R}$, telle que $x_{n+1} - x_n$ tende vers 0 lorsque $n \to \infty$. On note $\ell = \liminf x_n$, $L = \limsup x_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est l'intervalle $[\ell, L]$ tout entier. [On pourra raisonner par l'absurde.]

b. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et $x_0 \in [a, b]$. Déduire de **a** que la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge si et seulement si $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0.

SÉRIES

4. Propriétés générales

Notations : À une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes (ou réels) on associe la suite des *sommes partielles*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \ .$$

Rappelons le passage suites $\leftrightarrow$ séries, donné dans l'autre sens par $u_n = \Delta S_n = S_n - S_{n-1}$. Les opérateurs Δ et Σ, inverses l'un de l'autre, sont des analogues discrets de la dérivation et de l'intégration des fonctions.

On dit que *la série* $\sum u_n$ *est convergente* si la suite (S_n) converge vers une limite (finie) S, qu'elle est *divergente* sinon. Si elle converge on écrit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \\ &= S_n + R_n \ , \text{ avec } R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \ . \end{aligned}$$

R_n est le n-ème *reste* de la série.

La série $\sum u_n$ est dite *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente ; elle est dite *semi-convergente* si elle est convergente mais non absolument.

Toutes les définitions et résultats de ce §4 s'étendent (sauf mention du contraire) aux séries dans un espace vectoriel normé *complet* (espace de Banach), en remplaçant le module par la norme.

Premiers exemples. Pour $a, q \in \mathbb{C}$ la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{\text{premier terme}}{1 - \text{raison}} = \frac{a}{1-q} \ , \ |q| < 1 \ .$$

La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge car

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \ ,$$

donc (S_n) n'est pas une suite de Cauchy.

- Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ (condition nécessaire, non suffisante : voir $\sum \frac{1}{n}$)
- Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge (réciproque fausse : voir la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$)

Théorème 3 *(Commutativité ; [G] p.210, [LFA] p.281, [TM] p.155) Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente, alors, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ est encore absolument convergente et a même somme :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \ .$$

On dit que la série est commutativement convergente*.*

Dans une série absolument convergente on peut donc changer arbitrairement l'ordre des termes.

Contre-exemple ([MV] p.117). Pour la série harmonique alternée, non absolument convergente, on a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2$$

mais, en prenant un impair puis deux pairs puis un impair etc. on obtient

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\ln 2}{2}\ .$$

En effet la seconde série est, par groupement de termes 3 par 3 (théorème 4),

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)}\right)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)+\cdots\right]\ ,$$

et on reconnaît entre crochets la première série, après groupement 2 par 2. Le calcul de sa somme s'obtient facilement en intégrant de 0 à 1 l'expression

$$1-x+\cdots+(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}\ .$$

Plus généralement, *une série réelle ou complexe est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente* ([LFA] p.282, [MV] p.117, [TM] p.191). On montre pour cela que, quel que soit le nombre donné S, on peut toujours changer l'ordre des termes d'une série semi-convergente de manière à en faire une série convergente de somme S.

Théorème 4 *(Associativité par groupement de termes consécutifs ; [P] p.143, [TM] p.153) Si $u_n \to 0$, on ne change pas la nature de la série $\sum u_n$, ni sa somme en cas de convergence, en effectuant des groupements de termes* consécutifs en nombre borné .

5. Cas des séries à termes positifs ([LFA], [P], [TM])

Les sommes partielles forment alors une suite croissante, donc convergente si et seulement si elle est majorée. Quelques règles classiques s'appliquent aux séries à termes positifs (et à elles seules !) :

- *Comparaison* : si $0 \le u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$converge

- *Règle de Cauchy* : si $u_n \ge 0$ pour tout n soit $\ell = \limsup \sqrt[n]{u_n}$; alors la série $\sum u_n$ converge si $\ell < 1$, diverge grossièrement (i.e. u_n ne tend même pas vers 0) si $\ell > 1$ ([LFA] p.271)

- *Règle de d'Alembert* : même conclusion si $u_n > 0$ pour tout n et si $u_{n+1}/u_n \to \ell$

- *Comparaison à une intégrale* : soit $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction *décroissante, tendant vers* 0 à l'infini (donc positive) ; alors la série $\sum_{n\ge a} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.
Remarque : ce résultat est encore valable si $f : [a,\infty[\to \mathbb{C}$ est continûment dérivable et si l'intégrale $\int_a^\infty |f'(x)|dx$ est convergente ([ZQ] p.16, [G] p.217) ; pour f décroissante (réelle) on retrouve le résultat précédent.

- *Usage des équivalents* ([G] p.204) : rappelons que $u_n \sim v_n$ signifie $u_n = v_n(1+\varepsilon(n))$ avec $\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n) = 0$; si $v_n \ne 0$ cela s'écrit encore $\lim(u_n/v_n) = 1$. Supposons $v_n > 0$ à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$.
  ∗ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$converge et $\sum_{k=n+1}^\infty u_k \sim \sum_{k=n+1}^\infty v_k$ lorsque $n \to \infty$
  ∗ si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$ lorsque $n \to \infty$.

6. Étude d'une série réelle ou complexe

On pourra chercher d'abord à établir sa convergence absolue en appliquant les recettes précédentes à $\sum |u_n|$. En cas d'échec on pourra éventuellement appliquer l'un des deux théorèmes suivants ou raisonner sur un développement limité de u_n.

Théorème 5 *(Théorème des séries alternées ; [LFA] p.277, [P] p.140, [TM] p.146) On appelle série alternée une série de la forme*

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \ ,$$

où les a_n sont tous positifs.
Si a_n (valeur absolue de son terme général) tend vers 0 en décroissant*, alors la série alternée converge et sa somme S vérifie*

$$S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'encadrement de S signifie que le reste $R_n = (-1)^{n+1} a_{n+1} + \cdots$ a le signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ et lui est inférieur en valeur absolue. Les S_{2n+1} et les S_{2n} forment deux *suites adjacentes*, de limite commune S. La preuve du théorème se retrouve facilement en esquissant le graphe de S_n fonction de n.

Théorème 6 *(Théorème d'Abel ; [LFA] p.278, [P] p.142, [TM] p.189) Soient (a_n) une suite réelle et (b_n) une suite complexe. On suppose que*
(i) a_n tend vers 0 en décroissant
*(ii) il existe une constante M (*indépendante de p et q*) telle que* $\left|\sum_{n=p}^{q} b_n\right| \le M$ *pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \ge p$.*
Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge et on a la majoration du reste, pour $p \ge 1$,

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n b_n\right| \le M a_p \ .$$

L'hypothèse (ii), assez contraignante, limite l'usage pratique du théorème d'Abel aux cas où $b_n = e^{in\theta}$ ou $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (séries trigonométriques) ; on peut alors prendre $M = 1/|\sin(\theta/2)|$, d'où

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right| \le \frac{a_p}{|\sin\theta/2|}$$

si a_n décroît vers 0 et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour $\theta = \pi$ on retrouve le théorème des séries alternées.

La preuve du théorème d'Abel repose sur le lemme suivant, qui a son intérêt propre :

Lemme 7 *(Sommation par parties, ou transformation d'Abel) Soient (x_n) et (y_n) deux suites complexes ; on note $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Pour $q \ge p \ge 1$ on a*

$$\sum_{n=p}^{q} x_n \cdot \Delta y_n = (x_q y_q - x_{p-1} y_{p-1}) - \sum_{n=p}^{q} \Delta x_n \cdot y_{n-1} \ .$$

Preuve : sommer de p à q l'égalité $\Delta(x_n y_n) = x_n \Delta y_n + \Delta x_n \cdot y_{n-1}$. L'analogie est patente avec la formule d'intégration par parties (et sa preuve).

7. Séries doubles

Soit maintenant $(p, q) \mapsto u_{pq}$ une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. Quel sens donner à $\sum\sum_{p,q\in\mathbb{N}} u_{pq}$? On peut envisager trois procédés naturels de sommation, par colonnes, par lignes, ou par triangles :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{pq}\right) \ , \text{ou} \ \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{pq}\right) \ , \text{ou} \ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{pq}\right) \ .$$

Théorème 8 *([LFA] p.306, [P] p.212) On suppose que, par l'un de ces trois procédés (au choix) appliqué aux $|u_{pq}|$, on obtient une série convergente. Alors les trois procédés, appliqués aux u_{pq}, donnent des séries absolument convergentes et de même somme :*

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} u_{pq}\right) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} u_{pq}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n}^{\infty} u_{pq}\right) .$$

On dit alors que la série double converge absolument et on note $\sum\sum_{p,q\in\mathbb{N}} u_{pq}$ la valeur commune de ces trois expressions.

Contre-exemple. Que donnent les trois procédés de sommation pour $u_{pq} = p-q$ si $p-q = \pm 1$ et $u_{pq} = 0$ sinon ?
Exemple. Pour $|z| < 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} .$$

En effet $z^n/(1-z^{2n}) = \sum_{p=0}^{\infty} z^{(2p+1)n}$ (série géométrique), d'où en permutant les sommations sur n et p,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} z^{(2p+1)n}\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{(2p+1)n}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{1-z^{2p+1}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{2p-1}}{1-z^{2p-1}} .\end{aligned}$$

La permutation est justifiée par le théorème précédent puisque

$$\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{(2p+1)n} = \frac{|z|^n}{1-|z|^{2n}} \sim |z|^n ,$$

ce qui assure la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty} |z|^{(2p+1)n}\right)$ pour $|z| < 1$.

8. Exercices sur les séries

8.1. ([MV] p.115) Soit $\sum_1^{\infty} u_n$ une série réelle convergente. Montrer que $\sum_1^{\infty} u_n/n$ et $\sum_1^{\infty} e^{1/n} u_n$ convergent. [On pourra appliquer le théorème d'Abel à la première, et un développement limité à la seconde.]
8.2. *Série alternée* (extrait du problème d'analyse 1984). Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

(fonction J_0 de Bessel). Montrer que f admet un zéro unique compris entre 0 et $2\sqrt{2}$. [On pourra montrer que $f(2) > 0$, $f(2\sqrt{2}) < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 2\sqrt{2}$.]
8.3. *Séries alternées (?!)* ([G] p.214). Discuter la convergence de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ pour $\alpha > 0$, et celle de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$. [On pourra utiliser un développement limité, ou grouper les termes 2 par 2.]
8.4. *Série double.* On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ pour $s > 1$. Montrer que $\sum_{p=2}^{\infty}(\zeta(p) - 1) = 1$.

RÉFÉRENCES

[G] GOURDON, *Analyse*, Ellipses 1994
[LFA] LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de Mathématiques, tome 2, Analyse*, Dunod 1996
[MV] MOISAN et VERNOTTE, *Topologie et séries, exercices corrigés*, Ellipses 1991
[P] POMMELLET, *Agrégation de mathématiques, cours d'analyse*, Ellipses 1994
[R] http ://math.unice.fr/~frou/suites/Produit-Infini.pdf
[TM] TISSIER et MIALET, *Analyse à une variable réelle*, Bréal 2000
[ZQ] ZUILY et QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson 1995