Topologie et Calcul Différentiel

EXAMEN DU 24 JANVIER 2005

Durée : trois heures.
Sans documents. Les trois exercices sont indépendants.
La qualité et la précision de la rédaction seront un élément important d'appréciation de la copie. Barème indicatif : **1** = 6 points, **2** = 8 points, **3** = 6 points.

1. Courbe définie implicitement. On note S_1 et S_2 les surfaces de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives

$$S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$
$$S_2 : xy + yz + zx = 3 \tag{2}$$

et A le point $(1, 1, 1)$.
a. Écrire l'équation des plans tangents en A à S_1 et S_2.
b. Montrer qu'au voisinage du point A le système d'équations (1)(2) définit implicitement y et z fonctions (de classe C^2) de x.
c. Donner un développement limité de ces deux fonctions, à l'ordre deux, au voisinage du point $x = 1$. On notera $h = x - 1$.

2. Équation différentielle. On considère l'équation

$$x' = x^2 - 1 \ , \tag{3}$$

où $x : t \mapsto x(t)$ est la fonction inconnue.
a. Déterminer les solutions constantes (positions d'équilibre) x_1 et x_2 de (3). Montrer que si une solution quelconque de (3) prend la valeur x_1 ou x_2, elle est nécessairement constante.

Dans la suite on ajoute à (3) la condition initiale $x(0) = a$, avec $a \neq x_1$ et $a \neq x_2$.
b. Expliciter *avec soin* la solution maximale du problème, en précisant son intervalle I de définition, selon les valeurs de a.
c. Esquisser quelques courbes intégrales des différents types. Comment se déduisent-elles les unes des autres ?

T.S.V.P.

3. Un théorème d'inversion globale. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|.\|$. Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, supposée k-*dilatante*, c'est-à-dire

$$\|f(y) - f(x)\| \geq k \|y - x\| \tag{4}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

a. On note $Df(x)$ (application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même) la différentielle de f au point x. Déduire de (4) que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|Df(x)h\| \geq k \|h\| \ .$$

b. En déduire que le théorème d'inversion locale s'applique à f au voisinage de chaque point de $\mathbb{R}^n$, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

c. Soit $y_p = f(x_p)$ une suite de points de $f(\mathbb{R}^n)$. On suppose que cette suite converge vers un point y de $\mathbb{R}^n$. Montrer à l'aide de (4) que les x_p forment une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$, et en déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

d. Montrer que f est injective, et déduire des questions précédentes que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même. [On admettra qu'une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ qui est ouverte et fermée est l'espace tout entier.]