Topologie et Calcul Différentiel

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 24 JANVIER 2005

1. Courbe définie implicitement.
a. Les fonctions $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$ et $g(x,y,z) = xy + yz + zx - 3$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. La différentielle $Df(x,y,z) = 2(x,-y,z)$ ne s'annule qu'à l'origine, qui n'appartient pas à S_1. De même la différentielle $Dg(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$ ne s'annule qu'à l'origine, qui n'appartient pas à S_2. Par suite S_1 et S_2 admettent un plan tangent en chacun de leurs points.

Le point $A = (1,1,1)$ appartient bien à S_1 et à S_2, puisque $f(A) = g(A) = 0$. Le plan tangent à S_1 en ce point a pour équation

$$f'_x(A)(x-1) + f'_y(A)(y-1) + f'_z(A)(z-1) = 0 \ ,$$

et de même pour S_2, ce qui donne $(x-1)-(y-1)+(z-1) = 0$ et $(x-1)+(y-1)+(y-1) = 0$ respectivement, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x - y + z = 1 &\text{ pour } S_1 \\ x + y + z = 3 &\text{ pour } S_2. \end{aligned}$$

b. La matrice jacobienne de (f,g) par rapport aux variables (x,y,z) est, au point A,

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & 2z \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant extrait des deux dernières colonnes est $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$, non nul, ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point de départ A pour extraire les deux dernières variables y et z comme fonctions de la première x. Par suite il existe V, voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{R}$, W, voisinage ouvert de $(1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$, et un couple de fonctions (φ, ψ), de classe C^∞ sur V, uniques, telles que

$$\left(x \in V, (y,z) \in W \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{array} \right. \right) \Longleftrightarrow \left(x \in V \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{array} \right. \right).$$

Au voisinage de A la courbe d'intersection de S_1 et S_2 peut donc être paramétrée par x.
c. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre deux les développements demandés seront

$$y = \varphi(x) = 1 + \varphi'(1)h + \frac{1}{2}\varphi''(1)h^2 + o(h^2)$$

avec $h = x - 1$, et de même pour $z = \psi(x)$. Il suffit donc de calculer les dérivées premières et secondes des fonctions implicites φ et ψ. Notons simplement y', z', y'', z'' ces dérivées. En dérivant par rapport à x les équations $f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$, vérifiées identiquement pour $x \in V$, il vient

$$\left\{ \begin{array}{c} x - yy' + zz' = 0 \\ y + z + x(y' + z') + zy' + yz' = 0 \end{array} \right. \qquad (*)$$

Au point A on a $x = y = z = 1$ et il reste $1 - y' + z' = 0$, $1 + y' + z' = 0$, d'où $y' = 0$, $z' = -1$.

Dérivons encore (*) par rapport à x, ce qui donne

$$\begin{cases} 1 - yy'' - y'^2 + zz'' + z'^2 = 0 \\ 2(y' + z') + x(y'' + z'') + zy'' + z'y' + yz'' + y'z' = 0 \end{cases}$$

Au point A, compte tenu de $y' = 0$, $z' = -1$, il reste $2 - y'' + z'' = 0$, $-1 + y'' + z'' = 0$ d'où $y'' = 3/2$, $z'' = -1/2$. Les développements limités cherchés sont donc

$$\begin{cases} y = \varphi(x) = 1 + \frac{3}{4}h^2 + o(h^2) \\ z = \psi(x) = 1 - h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2). \end{cases} \tag{**}$$

[*Vérifications* (si on craint d'avoir fait une erreur de calcul !) La tangente en $A = (1, 1, 1)$ à la courbe d'intersection des deux surfaces est donc définie par le vecteur directeur $(x', y', z') = (1, 0, -1)$, d'où sa représentation paramétrique

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, -1) = (1 + t, 1, 1 - t) \ .$$

On vérifie que, pour tout t, ce point appartient bien aux deux plans tangents obtenus en **a**. On peut vérifier aussi que les développements limités $x = 1 + h$ et (**) satisfont les équations $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$.]

2. Équation différentielle.

a. Soit $x : t \mapsto x(t)$, fonction dérivable sur un intervalle I, solution constante de l'équation $x' = x^2 - 1$. Alors nécessairement $x(t)$ est la constante 1 ou -1 sur I. La réciproque est évidente. Il y a donc *deux positions d'équilibre,* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -1$.

Si une solution maximale quelconque $x(t)$ prend la valeur 1 à un instant t_0, elle est solution du problème

$$x' = x^2 - 1, x(t_0) = 1 \ .$$

Par unicité elle doit donc coïncider avec la solution évidente $x(t) \equiv 1$ de ce problème. De même si elle prend la valeur -1. En d'autres termes *une solution non constante de* (3) *ne prend jamais les valeurs* 1 *ou* -1.

b. Soit a différent de ± 1, et soit $x(t)$ une solution de

$$x' = x^2 - 1 \ , \ x(0) = a \ , \tag{3'}$$

dérivable sur un intervalle I contenant 0. D'après **a** la fonction $x(t)^2 - 1$ ne s'annule jamais pour $t \in I$. Donc (3') équivaut à

$$\frac{x'}{(x - 1)(x + 1)} = 1 \text{ pour } t \in I \ , \ x(0) = a \ .$$

La décomposition en éléments simples $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ permet d'intégrer, et (3') équivaut à

$$\ln|x - 1| - \ln|x + 1| = 2t + \ln|a - 1| - \ln|a + 1| \ , \ t \in I \ .$$

Notons $A = (a + 1)/(a - 1)$ pour abréger. L'égalité obtenue se réduit à

$$\ln\left|A\frac{x - 1}{x + 1}\right| = 2t \ , \ t \in I \ .$$

Par hypothèse a appartient à l'un des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, \infty[$. Comme $x(t)$ ne peut pas traverser les valeurs ± 1, il reste dans celui de ces intervalles qui contient *a*. Par suite l'expression $A(x-1)/(x+1)$ est toujours strictement positive et on peut enlever la valeur absolue, d'où

$$(3') \iff A\frac{x-1}{x+1} = e^{2t} \iff \left(A - e^{2t}\right) x = A + e^{2t} \ .$$

Pour en déduire x on doit diviser par $A - e^{2t}$, qui peut s'annuler, ce qui nécessite la discussion suivante.

1er cas : $a > 1$. Alors $A > 1$, et il existe T (unique) tel que $e^{2T} = A$; de plus $T > 0$. Le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $A - e^{2t} \neq 0$ est donc $I =]-\infty, T[$ et, pour $t \in I$,

$$x(t) = \frac{A + e^{2t}}{A - e^{2t}} = \frac{(a+1) + (a-1)e^{2t}}{(a+1) - (a-1)e^{2t}} \ . \qquad (*)$$

Cette solution explose lorsque t tend vers T ; elle est donc maximale.

2ème cas : $a < -1$. Alors $0 < A < 1$, et il existe T tel que $e^{2T} = A$; de plus $T < 0$. Comme précédemment on en déduit $I =]T, \infty[$ et la solution maximale (*) sur cet intervalle.

3ème cas : $-1 < a < 1$. Alors $A < 0$ donc $A - e^{2t}$ ne s'annule jamais. La solution maximale est alors (*) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

À cela s'ajoute, pour mémoire, le

4ème cas : $a = \pm 1$. Solution constante $x(t) = a$, définie sur $I = \mathbb{R}$.

.

c. Le signe de $x' = x^2 - 1$ donne le sens de variation de x, fonction croissante de t dans les cas 1 et 2, décroissante dans le cas 3. Les limites aux bornes de son intervalle de définition s'obtiennent facilement, ce qui permet d'esquisser les graphes [non reproduits ici].

Montrons que *les courbes intégrales de chaque type se déduisent de l'une d'entre elles par translations.* Soit en effet J l'un des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, \infty[$. Si a et b appartiennent à un même intervalle J, notons x et y les solutions maximales de

$$x' = x^2 - 1 \text{ et } x(0) = a$$
$$y' = y^2 - 1 \text{ et } y(0) = b.$$

L'étude des variations de la fonction x obtenue précédemment montre que c'est une bijection de I (son intervalle de définition) sur J. En particulier x prend la valeur b : il existe $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = b$. Alors la fonction translatée $t \mapsto x(t + t_0)$ (définie sur l'intervalle $I - t_0$) est solution maximale du même problème que $y(t)$, donc coïncide avec $y(t)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Un théorème d'inversion globale.

a. En remplaçant y par $x + th$ dans (4), où t est un scalaire et h un vecteur quelconque, on a

$$\|f(x+th) - f(x)\| \geq k \|th\| = k|t| \|h\|$$

d'où, pour $t \neq 0$,

$$\left\| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \right\| \geq k \|h\| \ .$$

En passant à la limite lorsque t tend vers 0 il vient

$$\|Df(x)h\| \geq k \|h\| \ .$$

b. D'après **a** l'égalité $Df(x)h = 0$ entraîne $h = 0$, et l'application linéaire $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est injective, donc *inversible*, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$. Le théorème d'inversion locale est donc applicable au voisinage d'un point x_0 quelconque de $\mathbb{R}^n$. Il donne un voisinage ouvert V

de x_0 et un voisinage ouvert W de $f(x_0)$ tels que la restriction de f à V soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

Soit $y_0 = f(x_0)$ un point de l'image $f(\mathbb{R}^n)$. Ce qui précède montre que cette image contient $W = f(V)$, voisinage de y_0. Par suite $f(\mathbb{R}^n)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$.

c. Si $y_p = f(x_p)$ converge vers y dans $\mathbb{R}^n$ alors, d'après (4),

$$\begin{aligned} k\,\|x_p - x_q\| &\leq \|f(x_p) - f(x_q)\| \\ &\leq \|f(x_p) - y\| + \|y - f(x_q)\| \ . \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$ pour p et q assez grands. C'est dire que (x_p) *est une suite de Cauchy*. Comme l'espace $\mathbb{R}^n$ est complet, cette suite converge vers un point x de $\mathbb{R}^n$ et, f étant continue en ce point, $f(x_p)$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite on en déduit $y = f(x)$, donc $y \in f(\mathbb{R}^n)$.

Ce raisonnement montre que tout point y adhérent à $f(\mathbb{R}^n)$ appartient à cet ensemble, par suite $f(\mathbb{R}^n)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^n$.

d. D'après (4) l'égalité $f(y) = f(x)$ entraîne $y = x$, donc f est injective. D'après **b** et **c** l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est (non vide) ouverte et fermée dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n$ est *connexe* (admis !) il en résulte que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

De plus f est de classe C^1. Son application réciproque f^{-1} est aussi de classe C^1 car, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, sa restriction au voisinage W de y_0 obtenu en **b** est de classe C^1. On conclut que f *est un* C^1*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *sur lui-même*.

Variante : Cette conclusion résulte aussi du théorème d'inversion globale cité en cours puisque f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, de classe C^1 et de différentielle $Df(x)$ inversible en tout point.

Deux erreurs fréquentes dans les copies :

1.a. L'équation du plan tangent à la surface $f(x, y, z) = 0$ est $f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \cdots = 0$, et non " $f'_x(x, y, z)(x - x_0) + \cdots = 0$ " (même si, pour les fonctions du second degré considérées ici, la formule erronée pouvait finalement conduire au résultat correct !).

3.b. "Comme $\|Df(x)h\| \geq k\,\|h\|$ pour tout h, on a $Df(x) \neq 0$ donc $Df(x)$ est inversible". Les plus scrupuleux écrivent "... on a$\|Df(x)\| \geq k > 0$ donc $Df(x)$ est inversible", ce qui ne vaut pas un sou de plus : dès que la dimension de l'espace est supérieure à un, un endomorphisme de cet espace peut être non nul, c'est-à-dire avoir une norme strictement positive, sans pour autant être inversible. Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.