Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière)

EXAMEN DU 8 SEPTEMBRE 2005

Durée : trois heures.
Sans documents. Les quatre exercices sont indépendants.
La qualité et la précision de la rédaction seront un élément important d'appréciation de la copie.
Barême indicatif : 2 points par question.

1. Racine cubique d'une matrice. On note E l'espace des matrices carrées $n \times n$ réelles (muni d'une norme d'application linéaire notée $\|.\|$), I la matrice unité et $f : E \to E$ l'application définie par

$$f(M) = M^3 \ , \ M \in E \ .$$

a. Calculer la différentielle de f en I.
b. En déduire, par le théorème d'inversion locale, qu'on peut définir une "racine cubique", application réciproque de f sur un voisinage de I.
c. Soit g cette application réciproque. Montrer que

$$g(I + X) = I + \frac{1}{3}X + \|X\| \, \varepsilon(X) \ ,$$

où $\varepsilon(X)$ tend vers 0 dans E lorsque X tend vers 0 dans E.

2. Point fixe et compacité.
a. Rappeler l'énoncé du théorème du point fixe.

Dans la suite on note E un espace normé sur $\mathbb{R}$ et K une partie *compacte* (non vide) de E. On suppose que K est *convexe* (pour tous points x et y de K le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans K), et que K *contient l'origine.* On considère une application $f : K \to K$ telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \tag{1}$$

pour tous $x, y \in K$.
b. Montrer à l'aide de **a** que, pour tout entier $n \geq 1$, l'application f_n définie par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ f(x)$$

possède dans K un point fixe unique, noté a_n.
c. En déduire que f *possède dans K au moins un point fixe* : on pourra extraire de (a_n) une sous-suite convergente vers un point a, et montrer que $f(a) = a$.
d. Montrer par deux exemples simples
- que le point fixe de f n'est pas nécessairement unique
- que l'hypothèse "K convexe" est nécessaire pour obtenir le résultat de **c**.

T.S.V.P.

3. Fonction implicite et équation aux dérivées partielles. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable.

a. Montrer que l'équation

$$z + xf(z) = y$$

définit une fonction implicite $z = u(x, y)$, de classe C^1 sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer les dérivées partielles de la fonction implicite u de **a**, et montrer qu'elle est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ , avec } u(0, y) = y \text{ .}$$

4. Identité d'Euler. Soient $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ le complémentaire de l'origine dans le plan, k une constante réelle et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, supposée *homogène de degré* k, c'est-à-dire

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \tag{2}$$

pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \Omega$.

En dérivant (2) par rapport à t montrer que

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = kf(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$.