CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE SEPTEMBRE 2005

1. Racine cubique d'une matrice.

a. Soit $X \in E$ une matrice carrée quelconque. Comme I et X commutent on a par la formule du binôme

$$f(I+X) = (I+X)^3 = I + 3X + 3X^2 + X^3 \ .$$

Au second membre figurent successivement $I = f(I)$, le terme $3X$ linéaire par rapport à l'accroissement X de la variable, et le reste $R(X) = 3X^2 + X^3$ qui est d'ordre supérieur à 1. D'après les propriétés des normes d'applications linéaires on a

$$\|R(X)\| \leq \|X\|^2 \, \|3 + X\|$$

donc $\|R(X)\| \,/\, \|X\|$ tend vers 0 quand X tend vers 0, autrement dit $R(X) = o(\|X\|)$ et

$$f(I+X) - f(I) = 3X + o(\|X\|) \ .$$

Ceci montre, par définition de la différentielle, que l'application f est différentiable au point I et que sa différentielle est l'application linéaire $X \mapsto 3X$ de E dans lui-même, i.e. $Df(I)X = 3X$.
Variante. On peut aussi, si on préfère, écrire $R(X) = \|X\| \, \varepsilon(X)$ avec

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{\|X\|}(3X^2 + X^3) \text{ si } X \neq 0 \ , \ \varepsilon(0) = 0 \ .$$

On a $\|\varepsilon(X)\| \leq \|X\| \, \|3 + X\|$ donc $\varepsilon(X)$ tend vers 0 avec X.

b. L'application f est de classe C^1 (et même C^∞) sur l'espace E tout entier, puisque les éléments matriciels de X^3 sont des fonctions polynomiales (de degré 3) de ceux de X. De plus l'application linéaire $Df(I) : X \mapsto 3X$ est évidemment inversible, d'inverse $Df(I)^{-1} : X \mapsto \frac{1}{3}X$. On peut donc appliquer à f le théorème d'inversion locale au voisinage de I. Par suite il existe un voisinage ouvert V de I dans E tel que l'application f, restreinte à V, soit un C^1-difféomorphisme de V sur l'ouvert $W = f(V)$ de E, voisinage de $f(I) = I$. Notons $g : W \to V$ l'application réciproque. On a donc

$$(X \in V \text{ et } Y = X^3) \iff (Y \in W \text{ et } X = g(Y)) \, ;$$

l'application g donne une "racine cubique locale" pour les matrices carrées proches de I.

c. En particulier g est différentiable en I, ce qui s'écrit

$$g(I+X) = I + Dg(I)X + \|X\| \, \varepsilon(X) \ ,$$

où $\varepsilon(X)$ tend vers 0 avec X. Or $Dg(I) = (Df(I))^{-1}$ (on retrouve cela en différentiant en I la fonction composée $(g \circ f)(X) = X$), d'où

$$g(I+X) = I + \frac{1}{3}X + \|X\| \, \varepsilon(X) \ .$$

C'est l'analogue matriciel de la formule classique $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ lorsque x est une variable réelle.

2. Point fixe et compacité.

a. *Théorème du point fixe* (rappel). Soient X un espace métrique *complet* (muni de la distance d) et f une application de X *dans lui-même*, supposée *contractante* : il existe une constante k, $0 \leq k < 1$, telle que

$$d(f(x), f(x')) \leq k\ d(x, x')$$

pour tous $x, x' \in X$.

Alors *il existe un unique point* $a \in X$ tel que $f(a) = a$. De plus a est limite de la suite des *itérés* x_0, $x_1 = f(x_0)$,..., $x_{n+1} = f(x_n)$,... à partir d'un point quelconque x_0 de X, et on a

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)\ .$$

b. L'application f considérée ici n'est pas nécessairement contractante, mais le théorème du point fixe est applicable à f_n sur K. En effet :

- K est un espace métrique compact, donc *complet*.
- La définition de f_n montre que $f_n(x)$ appartient au segment $[0, f(x)]$. D'après les hypothèses 0 et $f(x)$ appartiennent à K pour tout $x \in K$; comme K est convexe on a donc $f_n(x) \in K$, donc f_n *applique* K *dans lui-même*.
- Enfin, d'après l'hypothèse (1),

$$\|f_n(x) - f_n(x')\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(x')\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - x'\|\ ,$$

  donc f_n *est contractante* de rapport $k = 1 - \frac{1}{n} < 1$.

D'après le théorème du point fixe f_n admet dans K un unique point fixe, noté a_n.

c. Comme K est compact on peut extraire de la suite (a_n) une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers un point a de K. Montrons que *a est point fixe de f*. En effet l'égalité $f_{n_k}(a_{n_k}) = a_{n_k}$ s'écrit

$$\left(1 - \frac{1}{n_k}\right) f(a_{n_k}) = a_{n_k}\ .$$

Quand k tend vers l'infini on a $a_{n_k} \to a$ donc $f(a_{n_k}) \to f(a)$ (f est continue sur K d'après l'inégalité (1)) et $1 - \frac{1}{n_k} \to 1$. Par suite $f(a) = a$ en passant à la limite dans l'égalité.

d. Soit K un compact convexe quelconque. L'application identique de K vérifie (1), mais tout point de K est point fixe de f : il n'y a pas unicité.

Soient K un cercle du plan euclidien (compact non convexe) et f une rotation autour de son centre. On a $\|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\|$ et f applique K dans lui-même. Mais f n'a aucun point fixe dans K (sauf si c'est l'identité).

3. Fonction implicite et équation aux dérivées partielles.

a. La fonction $F(x, y, z) = z + xf(z) - y$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^3$. On a $F(0, 0, 0) = 0$ et $F'_z(x, y, z) = 1 + xf'(z)$ donc $F'_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites est donc applicable à F au voisinage de l'origine : il existe un voisinage ouvert V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}$ et une application $u : V \to W$, de classe C^1, unique, tels que

$$((x, y) \in V, z \in W \text{ et } z + xf(z) = y) \iff ((x, y) \in V \text{ et } z = u(x, y))\ .$$

b. Si les voisinages V et W de **a** sont suffisamment petits on a $F'_z(x, y, z) \neq 0$ pour $(x, y) \in V$ et $z \in W$, ce qui permet de calculer les dérivées partielles de la fonction implicite u. Par définition de u on a

$$u(x, y) + xf(u(x, y)) - y = 0$$

pour tous $(x, y) \in V$ d'où, en dérivant en x et en y,

$$u'_x + xf'(u)u'_x + f(u) = 0$$
$$u'_y + xf'(u)u'_y - 1 = 0$$

ce qui donne

$$u'_x = -\frac{f(u)}{1 + xf'(u)} \ , \ u'_y = \frac{1}{1 + xf'(u)} \ .$$

Comme toujours dans ce genre de calcul, on reconnaît au dénominateur l'expression $F'_z(x, y, z)$, non nulle d'après ce qui précède.
Ces égalités entraînent que u est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$u'_x + f(u)u'_y = 0 \ .$$

D'autre part en prenant $x = 0$ dans l'équation de départ $z + xf(z) = y$ on obtient $z = y$, autrement dit on a $u(0, y) = y$.

4. Identité d'Euler. En dérivant par rapport à t l'identité

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \ ,$$

valable pour tout $t > 0$ et tout $(x, y) \in \Omega$, on obtient par dérivation de fonction composée

$$f'_x(tx, ty)x + f'_y(tx, ty)y = kt^{k-1} f(x, y) \ ,$$

d'où, en prenant $t = 1$,

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = kf(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in \Omega$.