Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière) **9.1.06**

EXAMEN (1ère session)

Durée 3 heures. Sans documents.
Les trois exercices sont indépendants. Une rédaction claire et précise sera appréciée.
Barême indicatif : **1** = 5 points (3+2), **2** = 7 points (1+3+3), **3** = 8 points (1+2+2+1+2).

1. Fermés emboîtés. Soit X un espace métrique muni de la distance d. On note

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

le *diamètre* d'une partie A de X. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties fermées (non vides) de X, telles que

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots \text{ et } \lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0 \ .$$

a. On suppose X *complet*. Montrer alors que l'intersection $F = \bigcap_{n\geq 1} F_n$ contient un point et un seul.
[Indication : prendre un point x_n dans F_n et montrer qu'on obtient ainsi une suite de Cauchy.]
b. On prend $X =]0,\infty[$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$ et

$$F_n = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots \right\} \ .$$

Déterminer $\delta(F_n)$ et $\bigcap_{n\geq 1} F_n$. Qu'en déduit-on ?

2. Fonction implicite et extremum. Soit C la courbe d'équation

$$x^6 + y^6 + 3x^2y^2 = 1 \ .$$

a. Montrer que C est contenue dans le carré $[-1,1]\times[-1,1]$.
b. Montrer qu'on peut résoudre l'équation de C sous la forme $y = \varphi(x)$ au voisinage de $x = 0$, $y = 1$, où φ est une fonction de classe C^2. Calculer les dérivées $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
Montrer qu'on peut résoudre l'équation sous la forme $x = \psi(y)$ au voisinage de $x = 1$, $y = 0$.
c. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. Montrer que la restriction de f à C atteint son maximum et son minimum. En utilisant le théorème des extremums liés, calculer la valeur de ce maximum et de ce minimum.

3. Point fixe. Soient E l'espace des matrices réelles $n \times n$, muni d'une norme $\|.\|$ telle que $\|XY\| \leq \|X\|\,\|Y\|$ pour tous $X, Y \in E$, et soit I la matrice unité. On note $B(A,r)$ la boule ouverte et $\overline{B}(A,r)$ la boule fermée de centre A et de rayon r dans E.
Pour $N \in E$ donné, on cherche à résoudre l'équation $M^2 = N$, où $M \in E$ est l'inconnue. On note

$$M = I + X \ , \ N = I + A \text{ et } f(X) = \frac{1}{2}(A - X^2) \ .$$

Dans la suite A est fixé, avec $\|A\| < 1$.
a. Montrer que $M^2 = N$ équivaut à $f(X) = X$.
b. Montrer qu'on peut choisir un rayon r, fonction de A, tel que $0 < r < 1$ et $f(\overline{B}(0,r)) \subset \overline{B}(0,r)$.
c. Montrer que f est une application différentiable en tout point de E et calculer $Df(X)H$ pour $X, H \in E$.
d. Si u est une application linéaire de E dans E on note $\|u\|_\ell$ sa norme d'application linéaire (associée à la norme $\|.\|$ sur E). Montrer que, pour tout $X \in E$,

$$\|Df(X)\|_\ell \leq \|X\| \ .$$

En déduire que f est contractante sur $\overline{B}(0,r)$.
e. Déduire des questions précédentes un résultat d'existence et d'unicité d'une solution pour l'équation $M^2 = N$ avec $N \in B(I,1)$.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN

1. Fermés emboîtés.

a. Soit x_n un point de F_n. Pour $p \geq n$ on a $F_p \subset F_n$ donc x_n et x_p appartiennent à F_n, d'où

$$d(x_n, x_p) \leq \delta(F_n) \text{ pour } p \geq n \ .$$

Comme $\delta(F_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy dans X. L'espace étant complet, cette suite converge vers un point a de X.

Comme $x_p \in F_n$ pour tout $p \geq n$ et comme F_n est un fermé de X, le point $a = \lim x_p$ appartient encore à F_n, ceci pour tout $n \geq 1$. Par suite $a \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$.

Enfin si b est un autre point de cette intersection, a et b sont dans F_n pour tout n, d'où $d(a,b) \leq \delta(F_n)$. En faisant tendre n vers l'infini on en déduit $d(a,b) = 0$, d'où $a = b$. Par suite $\bigcap_{n \geq 1} F_n$ *contient un point et un seul.*

b. Pour $n \geq 1$ l'ensemble $F_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\right\}$ *est un fermé de* $X =]0, \infty[$. Soit en effet $A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$. C'est un fermé de $\mathbb{R}$, car une suite convergente d'entiers est forcément constante à partir d'un certain rang - ou parce que $A_n = [n, \infty[\cap \{x \in \mathbb{R} | \sin \pi x = 0\}$ si on préfère ! Image réciproque de A_n par l'application $x \mapsto 1/x$, continue de X dans $\mathbb{R}$, F_n est donc un fermé de X.

Les F_n sont évidemment emboîtés décroissants : $F_{n+1} \subset F_n$. Comme $F_n \subset]0, 1/n]$ on a $d(x,y) \leq \frac{1}{n}$ pour tous $x, y \in F_n$, donc $\delta(F_n) \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+p}$ appartiennent à F_n pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\delta(F_n) \geq \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right|$ d'où $\delta(F_n) \geq \frac{1}{n}$ en faisant tendre p ves l'infini. Par suite $\delta(F_n) = \frac{1}{n}$, donc $\delta(F_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Pourtant *l'intersection des* F_n, $n \geq 1$, *est vide* : comme $F_n \subset]0, 1/n]$ un point x commun à tous les F_n devrait vérifier $0 < x \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, ce qui est impossible (on a $\frac{1}{n} < x$ dès que $n > \frac{1}{x}$).

Cet exemple montre l'utilité de l'hypothèse X *complet* dans la question **a**.

2. Fonction implicite et extremum.

a. Si $(x,y) \in C$ on a $x^6 \leq x^6 + y^6 + 3x^2y^2 = 1$ d'où $|x| \leq 1$, et de même $|y| \leq 1$. C'est dire que C est contenue dans le carré $[-1,1] \times [-1,1]$.

b. La fonction $g(x,y) = x^6 + y^6 + 3x^2y^2 - 1$ est de classe C^2 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\partial_y g(x,y) = 6y^5 + 6x^2y = 6y(x^2 + y^4) \ .$$

Ainsi $g(0,1) = 0$ et $\partial_y g(0,1) = 6 \neq 0$, ce qui permet d'appliquer à g le théorème des fonctions implicites au voisinage du point de départ $(0,1)$. Il existe donc V, voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, W, voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{R}$, et $\varphi : V \to W$, fonction de classe C^2, unique, tels que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } g(x,y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)) \ .$$

Autrement dit la partie $C \cap (V \times W)$ de C est le *graphe* de φ.

Par définition même on a $x^6 + y^6 + 3x^2y^2 = 1$ pour $x \in V$ et $y = \varphi(x)$ d'où en dérivant deux fois, avec $y' = \varphi'(x)$ et $y'' = \varphi''(x)$,

$$6x^5 + 6y^5y' + 6x^2yy' + 6xy^2 = 0$$
$$30x^4 + 6y^5y'' + 30y^4y'^2 + 6x^2yy'' + 6x^2y'^2 + 24xyy' + 6y^2 = 0 \ .$$

En $x = 0, y = 1$ il vient $y' = \varphi'(0) = 0$ et $y'' = \varphi''(0) = -1$.

En $(1,0)$ on a $\partial_y g(1,0) = 0$ et la méthode précedente n'est plus valable. Mais on a $g(1,0) = 0$, $\partial_x g(x,y) = 6x(x^4 + y^2)$, $\partial_x g(0,1) = 6 \neq 0$, et le théorème des fonctions implicites donne V', voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{R}$, W', voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$, et $\psi : W' \to V'$, de classe C^2, unique, telle que

$$(x \in V', y \in W' \text{ et } g(x,y) = 0) \iff (y \in W' \text{ et } x = \psi(y)) \ .$$

c. Comme g est continue sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $C = g^{-1}(0)$ est un fermé du plan. Il est borné d'après **a**, donc *C est un compact de $\mathbb{R}^2$*.

La fonction f, continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur C, est donc bornée sur C et y atteint ses bornes. Notons $a \in C$, resp. $b \in C$, un point où f atteint son maximum (resp. minimum) sur C.

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Comme le vecteur $\operatorname{grad} g(x,y) = (6x(x^4+y^2), 6y(x^2+y^4))$ ne s'annule qu'en $x = y = 0$, on a $\operatorname{grad} g(x,y) \neq 0$ pour tout $(x,y) \in C$. On peut donc appliquer le théorème des extremums liés pour rechercher ceux de f sur C, et les coordonnées (x,y) des points a et b cherchés doivent vérifier les conditions nécessaires suivantes :

$$g(x,y) = 0 \text{ et } \exists\lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y)\ ,$$

ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x^6 + y^6 + 3x^2y^2 = 1 \\ x\left[3\lambda(x^4 + y^2) - 1\right] = 0 \\ y\left[3\lambda(x^2 + y^4) + 1\right] = 0 \end{cases}$$

Discussion. Il y a quatre cas à envisager, selon que l'un des facteurs x, y, ou l'un des crochets [...] est nul.

▶ $x = y = 0$ est exclu : ce point n'est pas sur C.

▶ $3\lambda(x^4 + y^2) - 1 = 3\lambda(x^2 + y^4) + 1 = 0$ est exclu : λ devrait être > 0 et < 0 à la fois.

▶ $x = 0$ et $3\lambda(x^2 + y^4) + 1 = 0$. Pour $x = 0$ l'équation de C donne $y = \pm 1$, d'où $(x,y) = (0, \pm 1)$ et $\lambda = -1/3$.

▶ $y = 0$ et $3\lambda(x^4 + y^2) - 1 = 0$. On trouve de même $(x,y) = (\pm 1, 0)$ et $\lambda = 1/3$.

Les points a et b cherchés sont donc $(0, \pm 1)$ ou $(\pm 1, 0)$. Comme $f(0, \pm 1) = -1$ et $f(\pm 1, 0) = 1$, *le maximum de f sur C est atteint en $(1,0)$ et $(-1,0)$, et son minimum en $(0,1)$ et $(0,-1)$.*

Variante. La simplicité de la fonction f permet une solution plus rapide. En effet $f(x,y) = x^2 - y^2 \leq x^2 \leq 1$ pour tout $(x,y) \in C$, avec égalités si et seulement si $x = \pm 1$ et $y = 0$. Comme $(\pm 1, 0) \in C$, ce sont les points où f atteint son maximum sur C. De même $f(x,y) \geq -y^2 \geq -1$, d'où les points de minimum $(0, \pm 1)$.

3. Point fixe.

a. Avec $M = I + X$ et $N = I + A$, l'égalité $M^2 = N$ s'écrit $(I + X)^2 = I + A$, c'est-à-dire $2X + X^2 = A$, soit encore $f(X) = X$ avec $f(X) = \frac{1}{2}(A - X^2)$.

b. Cherchons à majorer $\|f(X)\|$ lorsque $\|X\| \leq r$. D'après les propriétés de la norme on a

$$\|f(X)\| = \frac{1}{2}\left\|A - X^2\right\| \leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{1}{2}\|X\|^2 \leq \frac{1}{2}\|A\| + \frac{r^2}{2}\ .$$

On aura donc $\|f(X)\| \leq r$ si $\|A\| + r^2 \leq 2r$, ce qui s'écrit encore $(1-r)^2 \leq 1 - \|A\|$. Comme $\|A\| < 1$ on peut prendre r tel que

$$0 \leq 1 - \sqrt{1 - \|A\|} < r < 1\ ,$$

ce qui donne bien $0 < r < 1$ et $f(\overline{B}(0,r)) \subset \overline{B}(0,r)$.

Remarque. Si $A \neq 0$ un choix simple de r est par exemple $r = \|A\|$, puisque $1 - \|A\| < \sqrt{1 - \|A\|}$ d'où $1 - \sqrt{1 - \|A\|} < \|A\| < 1$.

c. Pour $X, H \in E$ on a

$$\begin{aligned} f(X+H) - f(X) &= -\frac{1}{2}((X+H)^2 - X^2) \\ &= -\frac{1}{2}(XH + HX + H^2)\ . \end{aligned}$$

Isolons dans cette expression les termes linéaires en H : soit $Df(X)$ l'application linéaire de E dans E définie par

$$Df(X)H = -\frac{1}{2}(XH + HX)\ ,\ H \in E\ .$$

Alors $f(X+H) - f(X) = Df(X)H - \frac{1}{2}H^2$ et, en notant

$$\varepsilon(H) = -\frac{1}{2\|H\|}H^2 \text{ si } H \neq 0\ ,\ \varepsilon(0) = 0\ ,$$

on a $\|\varepsilon(H)\| \leq \frac{1}{2}\|H\|$, donc $\varepsilon(H)$ tend vers 0 avec H, et

$$f(X+H) - f(X) = Df(X)H + \|H\|\,\varepsilon(H) \ .$$

C'est dire que f est différentiable en X avec $Df(X)$ pour différentielle.
d. D'après l'expression de $Df(X)$ on a $\|Df(X)H\| \leq \frac{1}{2} \cdot 2\|X\|\,\|H\| = \|X\|\,\|H\|$. Par suite $Df(X)$ est une application linéaire continue (comme toujours en dimension finie !) de E dans lui-même, et sa norme d'application linéaire vérifie

$$\|Df(X)\|_\ell \leq \|X\| \ ;$$

en particulier $\|Df(X)\|_\ell \leq r$ pour tout $X \in \overline{B}(0,r)$. Si X et X' sont deux points de cette boule, le segment $[X, X']$ est contenu dans la boule et

$$\|f(X) - f(X')\| \leq r\,\|X - X'\|$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Si $r < 1$, f *est donc contractante sur* $\overline{B}(0,r)$.
Variante. On peut aussi prouver ce résultat sans passer par les accroissements finis : l'expression obtenue en **c**

$$f(X+H) - f(X) = -\frac{1}{2}(XH + HX + H^2) = -\frac{1}{2}(X+H)H - \frac{1}{2}HX$$

entraîne, lorsque X et $X+H$ appartiennent à $\overline{B}(0,r)$,

$$\|f(X+H) - f(X)\| \leq \frac{1}{2}\left(\|X+H\| + \|X\|\right)\|H\| \leq \frac{1}{2}2r\,\|H\| = r\,\|H\| \ .$$

e. Le nombre r étant choisi comme en **b**, la boule $\overline{B}(0,r)$ est une partie complète de E (car fermée dans E, lui-même complet car normé de dimension finie), f applique la boule dans elle-même, et est contractante. D'après le théorème du point fixe, l'équation $f(X) = X$ admet donc dans $\overline{B}(0,r)$ une solution unique.

D'après **a**, l'équation $M^2 = N$ avec $N \in B(I,1)$, c'est-à-dire $N = I + A$ et $\|A\| < 1$, admet une solution unique $M = I + X$ avec $\|X\| \leq r$ (où r est choisi comme en **b**), c'est-à-dire $M \in \overline{B}(I,r)$.
Remarque. Cela résultat peut s'obtenir aussi par le théorème d'inversion locale, appliqué au voisinage de I à l'application $M \mapsto M^2$. L'exercice revient essentiellement à démontrer ce théorème sur cet exemple.