Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière) **8 juin 06**

EXAMEN 2ème session

Durée 3 heures. Sans documents.
Les trois exercices sont indépendants. Une rédaction claire et précise sera appréciée.
Barême indicatif : **1** = 6 points (1+1+2+2), **2** = 6 points (3+3), **3** = 8 points (2+2+2+2).

1. Topologie. Soient I l'intervalle $[0,1]$ et $E = C(I)$ l'espace des fonctions continues sur I, à valeurs réelles. On munit E de la distance définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.

a. Soit a un point de I. Montrer que l'application $f \mapsto f(a)$ est continue sur E.

b. Soit A l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f(1)$. Montrer que A est une partie fermée de E.

c. Montrer que A n'est pas compacte. [On pourra, par exemple, raisonner sur l'application de A dans $\mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \|f\|_\infty$.]

d. Montrer que A n'est pas une partie ouverte de E.

2. Une équation aux dérivées partielles.

a. Résoudre l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 ,$$

où l'inconnue est une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, à l'aide du changement linéaire de variables

$$(x, y, z) \mapsto (u, v, w) \text{ , avec } u = x - y \text{ , } v = y - z \text{ , } w = z \text{ .}$$

b. *Généralisation* : Soient a, b et c des constantes réelles non nulles toutes trois. Expliquer comment on pourrait choisir, de manière analogue, un changement linéaire de variables $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, avec $w = ax + by + cz$, pour résoudre l'équation

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \text{ .}$$

3. Fonctions implicites. On considère les fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$

$$f_1(x, y, z) = x^5 + y - z \text{ , } f_2(x, y, z) = x^3 - y^3 - z^2 \text{ ,}$$

et on note $S_1 = f_1^{-1}(0)$, $S_2 = f_2^{-1}(0)$, $C = S_1 \cap S_2$.

a. Déterminer les plans tangents en $A = (1, 0, 1)$ aux surfaces S_1 et S_2.

b. Montrer qu'il existe deux fonctions φ, ψ, de classe C^2 au voisinage de 1, telles que la courbe C soit définie, au voisinage de A, par les équations $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$.

c. Donner un développement limité de φ et ψ à l'ordre deux au voisinage de $z = 1$.

d. Déduire de **c** la tangente en A à la courbe C. Comparer avec le résultat de **a**.

Corrigé disponible à l'adresse : http ://math.unice.fr/~frou/