CORRIGÉ DE L'EXAMEN (2ème session)

1. Topologie.

a. L'application $f \mapsto f(a)$ est *linéaire* de E dans $\mathbb{R}$. L'inégalité évidente $|f(a)| \leq \|f\|_\infty$ montre qu'elle est continue et que sa norme d'application linéaire est au plus 1. [Cette norme est en fait égale à 1, puisque l'inégalité précédente est une égalité lorsque f est une fonction constante.]
b. D'après **a** l'application $\varphi : f \mapsto f(0) - f(1)$ est une forme linéaire continue sur E. Par suite son noyau $A = \varphi^{-1}(0)$ est un *sous-espace vectoriel fermé* de E.
c. L'application $\psi : f \mapsto \|f\|_\infty$ est *continue* sur E. Rappelons que cela vient de l'inégalité triangulaire

$$\left|\|f\|_\infty - \|g\|_\infty\right| \leq \|f - g\|_\infty = d(f, g) ,$$

où f, g sont deux éléments quelconques de E et d désigne la distance choisie sur E.
Si A était compacte son image $\psi(A)$ serait donc une partie compacte de $\mathbb{R}$, en particulier bornée. Mais cela est impossible car $\psi(A) = [0, \infty[$, puisque A contient toutes les fonctions constantes sur I, dont la norme est un réel positif arbitraire. Donc A *n'est pas compacte.*
Variante. Les fonctions constantes $f_n(x) = n$, avec $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à A. Mais il est impossible d'extraire de la suite (f_n) une sous-suite convergente, puisque $d(f_n, f_p) = |n - p| \geq 1$ pour $n \neq p$.
d. Supposons A ouverte. Pour $f \in A$ il existerait une boule ouverte $B(f, \varepsilon)$ de E, de centre f et de rayon $\varepsilon > 0$, tout entière contenue dans A. Considérons alors la fonction $g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}x$. On a $g \in E$ et

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left|\frac{\varepsilon}{2}x\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Par suite $g \in B(f, \varepsilon)$; cependant

$$g(0) = f(0) \ , \ g(1) = f(1) + \frac{\varepsilon}{2} = f(0) + \frac{\varepsilon}{2} \neq g(0) ,$$

donc $g \notin A$. Ceci contredit l'inclusion de $B(f, \varepsilon)$ dans A ; par suite A *n'est pas ouverte.*

2. Une équation aux dérivées partielles.

a. L'application $\varphi : (x, y, z) \mapsto (u, v, w) = (x - y, y - z, z)$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même. C'est en effet une application linéaire (donc de classe C^1) de déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 ,$$

donc inversible, et son inverse est encore de classe C^1.
[*Variante* : en résolvant un système triangulaire d'équations linéaires on a immédiatement

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = y - z \\ w = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = u + v + w \\ y = v + w \\ z = w \end{cases} ,$$

ce qui montre que φ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même, dont l'inverse est aussi de classe C^1.]

Notons $f(x,y,z) = g(u,v,w)$, autrement dit $f = g \circ \varphi$, ou encore $g = f \circ \varphi^{-1}$. Par différentiation de la fonction composée $f(x,y,z) = g(x-y, y-z, z)$ il vient

$$\partial_x f = \partial_u g \ , \ \partial_y f = -\partial_u g + \partial_v g \ , \ \partial_z f = -\partial_v g + \partial_w g \ ,$$

les dérivées partielles de f étant, bien entendu, calculées au point (x,y,z) et celles de g au point correspondant $(u,v,w) = \varphi(x,y,z)$. Par suite

$$\partial_x f + \partial_y f + \partial_z f = \partial_w g$$

et, traduite en coordonnées (u,v,w), l'équation proposée équivaut à $\partial_w g(u,v,w) = 0$. Sa solution générale est $g(u,v,w) = F(u,v)$, où F *est une fonction arbitraire de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$. En revenant aux coordonnées (x,y,z) on obtient enfin la *solution générale* de l'équation sous la forme

$$f(x,y,z) = F(x-y, y-z) \ .$$

Par exemple les fonctions $x-y$, $y-z$, $x-z = (x-y)+(y-z)$, $(x-y)^2 e^{z-y}$, etc. sont solutions.
b. Le résultat de l'exemple précédent (ainsi qu'un exemple traité en cours !) explique le succès du changement de variables choisi en **a** : u et v, les deux premières composantes de φ, sont *deux solutions particulières simples* de l'équation proposée, et le choix de $w = z$ pour les compléter n'a guère d'importance pourvu qu'il rende φ bijective.
La même méthode s'applique à l'équation plus générale

$$a\ \partial_x f + b\ \partial_y f + c\ \partial_z f = 0 \ , \tag{1}$$

où a, b, c sont des constantes non nulles toutes trois. Une forme linéaire

$$f(x,y,z) = a'x + b'y + c'z$$

est solution de (1) si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$ (comme le montre un calcul immédiat), c'est-à-dire ssi le vecteur (a', b', c') *est orthogonal à* (a,b,c) pour le produit scalaire canonique. Considérons donc le changement de variables

$$\varphi : (x,y,z) \longmapsto (u,v,w) \ , \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} u = a'x + b'y + c'z \\ v = a''x + b''y + c''z \\ w = ax + by + cz \end{array} \right. \ ,$$

où les vecteurs (a', b', c') et (a'', b'', c'') complètent (a,b,c) en une *base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$. Alors φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même, car c'est une application linéaire dont la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

est inversible, ses vecteurs lignes étant indépendants. En notant, comme en **a**, $f = g \circ \varphi$ (composée d'applications) on a par différentiation $Df = Dg \cdot A$ (produit de matrices), d'où

$$\begin{aligned} a\partial_x f + b\partial_y f + c\partial_z f &= (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\partial_u g, \partial_v g, \partial_w g)\ A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= (\partial_u g, \partial_v g, \partial_w g) \begin{pmatrix} aa' + bb' + cc' \\ aa'' + bb'' + cc'' \\ a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \left(a^2 + b^2 + c^2\right) \partial_w g \end{aligned}$$

compte tenu de l'orthogonalité des vecteurs choisis. Le coefficient de $\partial_w g$ étant non nul par hypothèse, l'équation (1) équivaut à $\partial_w g = 0$, d'où $g(u,v,w) = F(u,v)$ et finalement la *solution générale* de (1)

$$f(x,y,z) = F(a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z) \ ,$$

où F est une fonction arbitraire de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. Fonctions implicites.

a. Comme $f_1(1,0,1) = f_2(1,0,1) = 0$ le point A appartient à S_1 et à S_2. Les différentielles de f_1 et f_2 sont

$$Df_1(x,y,z) = (5x^5, 1, -1) \ , \ Df_2(x,y,z) = (3x^2, -3y^2, -2z) \ ,$$

d'où $Df_1(A) = (5,1,-1) \neq 0$ et $Df_2(A) = (3,0,-2) \neq 0$. Les surfaces S_1 et S_2 admettent donc des plans tangents P_1 et P_2 en A, d'équations respectives

$$\begin{aligned} &P_1 : 5(x-1) + y - (z-1) = 0 \ , \text{ soit } 5x + y - z = 4 \\ &P_2 : 3(x-1) - 2(z-1) = 0 \ , \text{ soit } 3x - 2z = 1 \ . \end{aligned}$$

b. Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$, et on a vu que $f_1(A) = f_2(A) = 0$. D'après **a** la matrice jacobienne en A de l'application $(x,y,z) \mapsto (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est

$$\begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \end{pmatrix} (A) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

Son premier mineur extrait $\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3$ étant non nul, le théorème des fonctions implicites s'applique au système d'équations $f_1(x,y,z) = 0, f_2(x,y,z) = 0$, qu'on pourra résoudre au voisinage de $A = (1,0,1)$ sous la forme $x = \varphi(z), y = \psi(z)$. Plus précisément : il existe un voisinage V de $(1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage W de 1 dans $\mathbb{R}$ et un unique couple de fonctions $(\varphi, \psi) : W \to V$, de classe C^2, telles que

$$\left((x,y) \in V, z \in W \text{ et } \begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases} \right) \iff \left(z \in W \text{ et } \begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases} \right) \ .$$

La courbe $C = S_1 \cap S_2$ peut donc être paramétrée par z au voisinage de A.

c. En dérivant par rapport à z les relations

$$x^5 + y - z = 0 \ , \ x^3 - y^3 - z^2 = 0 \ ,$$

vérifiées identiquement par $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ pour $z \in W$, il vient

$$5x^4 x' + y' - 1 = 0 \ , \ 3x^2 x' - 3y^2 y' - 2z = 0 \ . \tag{2}$$

Au point A on a $x = 1, y = 0, z = 1$ d'où $5x' + y' = 1$, $3x' = 2$ et

$$x' = \varphi'(1) = \frac{2}{3} \ , \ y' = \psi'(1) = -\frac{7}{3} \ . \tag{3}$$

Une nouvelle dérivation de (2) par rapport à z conduit à

$$5x^4 x'' + 20x^3 x'^2 + y'' = 0 \ , \ 3x^2 x'' + 6xx'^2 - 3y^2 y'' - 6yy'^2 - 2 = 0 \ ,$$

d'où $5x'' + 20x'^2 + y'' = 0$, $3x'' + 6x'^2 = 2$ en A et finalement

$$x'' = \varphi''(1) = -\frac{2}{9} \ , \ y'' = \psi''(1) = -\frac{70}{9} \ . \tag{4}$$

De (3) et (4) on déduit les *développements limités* au voisinage de $z = 1$ (en notant $z = 1 + h$)

$$x = \varphi(z) = 1 + \frac{2}{3}h - \frac{1}{9}h^2 + o(h^2)$$
$$y = \psi(z) = -\frac{7}{3}h - \frac{35}{9}h^2 + o(h^2) \ .$$

d. Par **b** la courbe C est, au voisinage de A, paramétrée par z selon $z \mapsto (\varphi(z), \psi(z), z)$. Le vecteur dérivé en $z = 1$ est $(\varphi'(1), \psi'(1), 1) = (2/3, -7/3, 1)$ d'après **c**. La tangente en $A = (1, 0, 1)$ à C est donc la droite de vecteur directeur $(2/3, -7/3, 1)$ passant par ce point, qui peut être paramétrée selon

$$x = 1 + \frac{2}{3}h \ , \ y = -\frac{7}{3}h \ , \ z = 1 + h \ . \tag{5}$$

Cette tangente aurait pu s'obtenir aussi comme intersection des plans tangents P_1 et P_2 : la non-nullité du mineur $\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ assure en effet que ces deux plans se coupent selon une droite. D'après **a** la tangente est donc la droite d'équations

$$\begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 3x - 2z = 1 \ . \end{cases}$$

Ces équations sont bien vérifiées par les valeurs de x, y, z données par (5), ce qui confirme les dérivées obtenues en (3).