LOGIQUE, ENSEMBLES, APPLICATIONS

un aide-mémoire

Logique

Opérateurs fondamentaux : *non*, *et*, *ou* ("ou" non exclusif). Écrire leurs tables de vérité.
Exemple. Une logicienne vient d'accoucher. Une amie la félicite :
- L'amie : "C'est une fille ou un garçon ?"
- La logicienne : "Oui."

$A \implies B$ (*A entraîne B*) signifie : $(nonA)$ *ou* B. C'est aussi $non(nonB)$ *ou* $(nonA)$, c'est-à-dire $(nonB) \implies (nonA)$ (principe du raisonnement par l'absurde).

Exercices. Analyser les assertions ou raisonnements suivants :
1. "Soit l'une des deux propositions est vraie, soit les deux ne sont pas fausses." (François Morel)
2. "Tous les vivants sont mortels. Or Socrate n'est pas vivant. Donc Socrate n'est pas mortel." (logique Shadok)
3. "Il n'est pas vrai que tous les hommes politiques sont incompétents et corrompus."
4. "Rien n'est plus comme avant." "Tout n'est plus comme avant."
5. *Théorème. Le plus grand nombre entier strictement positif est* 1.
Démonstration par l'absurde : Soit n le plus grand entier positif. Si on avait $n > 1$, alors $n^2 > n$ donc n^2 serait encore plus grand, ce qui contredirait la définition de n. Par suite $n = 1$.
6. *Théorème. Pour tout entier positif n on a $n = n + 1$.*
Démonstration par récurrence : Supposons la propriété vraie pour l'entier n. Alors $n = n+1$ d'où, en ajoutant 1 aux deux membres, $(n + 1) = (n + 1) + 1$. La propriété est donc vraie pour l'entier $n + 1$, ce qu'il fallait démontrer.
7. *Théorème. Il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.*
Démonstration : Prenons $a = b = \sqrt{2}$. Le nombre a^b est-il rationnel ? A vrai dire je n'en sais rien, mais qu'importe ! Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, le théorème est démontré. S'il ne l'est pas, prenons $a' = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b' = \sqrt{2}$. Alors $a'^{b'} = 2$ et le théorème est démontré. [Si ce raisonnement vous laisse perplexe, vous pouvez toujours vous rassurer en montrant que $\sqrt{2}$ et $\log_2 9$ sont irrationnels et $(\sqrt{2})^{\log_2 9} = 3$, ou encore (mais c'est plus difficile) que e et $\ln 2$ sont irrationnels et $e^{\ln 2} = 2$.]

Ensembles

$x \in A$: le point x *appartient* à l'ensemble A.
$A \subset B$: l'ensemble A *est inclus dans* l'ensemble B, i.e.[1] A est une partie de B, i.e. $x \in A$ *entraîne* $x \in B$.
$A \cap B$: *intersection* de A et B, i.e. $x \in A \cap B$ équivaut à ($x \in A$ *et* $x \in B$).
$A \cup B$: *réunion* de A et B, i.e. $x \in A \cup B$ équivaut à ($x \in A$ *ou* $x \in B$).
$B \setminus A$: *complémentaire* de A dans B, i.e. ensemble des points de B qui ne sont pas dans A.
Intersection et réunion s'étendent à une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble X, indexée par un ensemble d'indices I (par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers). On note $\bigcap_{i\in I} A_i$ l'intersection et $\bigcup_{i\in I} A_i$ la réunion de la famille des ensembles A_i. Ainsi
$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ signifie que x appartient à tous les A_i, i.e. *pour tout* $i \in I$, $x \in A_i$
$x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ signifie que x appartient à au moins un des A_i, i.e. *il existe* $i \in I$ *tel que* $x \in A_i$.

[1] i.e., abréviation de *id est* = *c'est-à-dire* en latin.

Exercices
8. Pour n entier, $n \geq 1$, on note $A_n =]0, \frac{1}{n}[$, $\overline{A_n} = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $B_n =]-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$, $\overline{B_n} = \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$. Déterminer réunion et intersection de chacune de ces quatre familles de parties de $\mathbb{R}$.
9. Dans *Le Monde* du 27.9.99 on pouvait lire, d'après une étude de la Chambre Syndicale des F.A.P.A.F.[2], que 28% des foyers français possèdent (au moins) un chien, 25% (au moins) un chat et 45% (au moins) un chien ou un chat. Peut-on en déduire le nombre de foyers qui ont (au moins) un chien et un chat ? de ceux qui n'ont ni l'un ni l'autre ?

Applications

$f : X \to Y$ signifie : f est une *application* de l'ensemble X dans l'ensemble Y.
$x \mapsto y = f(x)$ signifie : le point y de Y est l'*image du point* x de X par l'application f.
$g \circ f$ est l'*application composée* de f (d'abord !) et de g (ensuite !) : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Exemple. $f(x) = 2x$ et $g(x) = x + 1$ donnent $(g \circ f)(x) = 2x + 1$, $(f \circ g)(x) = 2x + 2$.
$f(A)$ est l'*image de la partie* A de X par l'application f. C'est la partie de Y formée de tous les $y = f(x)$ pour $x \in A$.
$f^{-1}(B)$ est l'*image réciproque de la partie* B de Y par l'application f. C'est la partie de X formée de tous les $x \in X$ tels que $f(x) \in B$.
Exemple. $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. On a $f(]-1, 2[) = [0, 4[$ et $f^{-1}([0, 4[) =]-2, 2[$.

Formulaire
On note $f : X \to Y$ une application, A et A' deux parties de X, B et B' deux parties de Y.

$$X \setminus (A \cup A') = (X \setminus A) \cap (X \setminus A')$$
$$X \setminus (A \cap A') = (X \setminus A) \cup (X \setminus A')$$
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \text{ , mais } f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \text{ , } f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$
$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B) \text{ .}$$

Pièges
La notation $f^{-1}(B)$ s'emploie même si f n'est pas bijective, i.e. même si f^{-1} n'est pas définie comme application réciproque de Y dans X ; revoir l'exemple $f(x) = x^2$. [Mais si f est bijective, $f^{-1}(B)$ est alors aussi l'image de B par l'application f^{-1}.] En général

$$f^{-1}(f(A)) \supset A \text{ , } f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B \text{ .}$$

Si f est injective on a $f^{-1}(f(A)) = A$. Si f est surjective on a $f(f^{-1}(B)) = B$.
Noter l'excellent comportement de f^{-1} vis-à-vis des réunions, intersections, complémentaires, bien meilleur que celui de f elle-même !

Exercices
10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$. Déterminer $f(]1/2, 2[)$ et $f^{-1}(]1/2, 2[)$.
11. Montrer par des exemples qu'on peut avoir

$$f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A') \text{ , } f^{-1}(f(A)) \neq A \text{ , } f(f^{-1}(B)) \neq B \text{ ,}$$

et qu'il n'y a aucune relation générale d'inclusion entre $f(X \setminus A)$ et $Y \setminus f(A)$.

[2] Fabricants d'Aliments Préparés pour Animaux Familiers.