Topologie et Calcul Différentiel

PARTIEL DU 25 NOVEMBRE 2004

Durée : deux heures.
Sans documents. Les trois exercices sont indépendants.
Barême indicatif : **1** = 5 points, **2** = 7 points, **3** = 8 points.

1. Norme d'application linéaire. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ (muni de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$) dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la norme $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$) définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Dessiner avec soin l'image par u de la sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.
b. Lire sur ce dessin la norme d'application linéaire de u.

2. Homéomorphisme entre boules. Soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$. On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$x \longmapsto y = f(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}\, x \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } y \longmapsto z = g(y) = \begin{cases} \frac{\|y\|_2}{\|y\|_1}\, y \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

a. Calculer $g(f(x))$ et $f(g(y))$.
b. Montrer que l'image par f de la boule unité de la norme $\|.\|_1$ est la boule unité de la norme $\|.\|_2$.
c. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
[Indication : la continuité à l'origine devra être étudiée séparément.]

3. Compacts et fonctions continues. Soient X et Y deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une application *continue*. On considère la propriété suivante de f :

(P) *l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X.*

a. Donner un exemple simple d'une application (continue) f qui ne vérifie pas la propriété (P).
b. Montrer que, si X est compact, toute f (continue) vérifie (P).
c. On prend maintenant $X = Y = \mathbb{R}^n$, muni d'une norme notée $\|.\|$. Montrer que (pour f continue) la propriété (P) est équivalente à :

(P') $\|f(x)\|$ *tend vers l'infini quand* $\|x\|$ *tend vers l'infini* ,

c'est-à-dire : pour tout $M > 0$ il existe $R > 0$ tel que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $\|x\| > R$ entraîne $\|f(x)\| > M$.
[Indication : en notant B_R la boule fermée de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$, on pourra montrer que (P') s'écrit aussi : pour tout $M > 0$ il existe $R > 0$ tel que $f^{-1}(B_M) \subset B_R$.]