Topologie et Calcul Différentiel **25 novembre 2004**

CORRIGÉ DU PARTIEL

1. Norme d'application linéaire.

a. La sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ est le carré de sommets $a = (1,1)$, $b = (-1,1)$, $c = -a$, $d = -b$. L'application u étant linéaire, l'image par u du segment de droite ab est le segment de droite $a'b'$ avec

$$a' = u(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$b' = u(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'image du carré est donc le parallélogramme de sommets a', b', $c' = -a'$, $d' = -b'$.

[Figure]

b. La norme d'application linéaire de u est[1]

$$\|u\| = \max_{\|(x,y)\|_\infty = 1} \|u(x,y)\|_2 .$$

Il s'agit donc de trouver les points du parallélogramme $a'b'c'd'$ les plus éloignés de l'origine pour la distance euclidienne. Le dessin montre clairement que ce sont a' et c', d'où

$$\|u\| = \|a'\|_2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} .$$

Remarque. Il est facile de justifier ce qu'on a lu sur le dessin : si m est un point du segment $a'b'$ on a $m = ta' + (1-t)b'$ avec $0 \le t \le 1$ d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\|m\|_2 \le t \|a'\|_2 + (1-t) \|b'\|_2 \le \max\left(\|a'\|_2 , \|b'\|_2\right) .$$

En raisonnant de même sur les autres côtés du parallélogramme, on voit que le maximum de distance à l'origine ne peut être atteint qu'en l'un des sommets. Les nominés sont donc $a', b'c', d'$. Comme $\|a'\|_2 = \|c'\|_2 = \sqrt{13} > 1 = \|b'\|_2 = \|d'\|_2$, les gagnants sont a' et c'.

2. Homéomorphisme entre boules.

a. Pour $x \neq 0$ notons $y = f(x)$. Alors, d'après les définitions et les propriétés des normes,

$$\|y\|_2 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \|x\|_2 = \|x\|_1 \ , \ \|y\|_1 = \frac{\|x\|_1^2}{\|x\|_2} ,$$

d'où $\|y\|_2 \,/\, \|y\|_1 = \|x\|_2 \,/\, \|x\|_1$ et

$$g(f(x)) = g(y) = \frac{\|y\|_2}{\|y\|_1} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}\, x = x .$$

[1] Noter qu'on écrit max plutôt que sup lorsqu'on est sûr que la borne supérieure est atteinte. C'est le cas ici puisque la sphère $\|(x,y)\|_\infty = 1$ est compacte et qu'une fonction continue sur un compact atteint sa borne supérieure.

Comme $g(f(0)) = 0$ évidemment, l'application composée $g \circ f$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$.
Il en est de même pour $f \circ g$ (en échangeant les rôles des deux normes), donc f *est une bijection de* $\mathbb{R}^n$ *sur lui-même, d'application réciproque* $g = f^{-1}$.

b. Soit B_1, resp. B_2, la boule unité fermée de la norme $\|.\|_1$, resp. $\|.\|_2$. On a vu que $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$ pour tout x (y compris $x = 0$!), donc $x \in B_1$ équivaut à $f(x) \in B_2$; par suite $f(B_1) \subset B_2$. Inversement, f étant surjective, tout $y \in B_2$ peut s'écrire $f(x)$ pour un certain x ; ce qui précède entraîne $x \in B_1$, d'où $B_2 \subset f(B_1)$. Finalement $f(B_1) = B_2$.

c. D'après le théorème d'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$, on peut au choix utiliser $\|.\|_1$ ou $\|.\|_2$ pour étudier la continuité.
L'égalité précédente, qui s'écrit

$$\|f(x) - f(0)\|_2 = \|x - 0\|_1 \ ,$$

entraîne la continuité de f à l'origine.
En dehors de l'origine, l'égalité

$$f(x) = \|x\|_1 \frac{1}{\|x\|_2} x$$

fait apparaître f comme un produit de fonctions continues. Donc f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
Il en est de même de g, déduite de f en échangeant les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Compte tenu des résultats de **a** et **b**, on conclut que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même qui transforme B_1 en B_2.

3. Compacts et fonctions continues.
a. Prenons par exemple $X = Y = \mathbb{R}$ et la fonction constante $f(x) = 0$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, mais l'image réciproque du compact $\{0\}$ n'est pas compacte (c'est $\mathbb{R}$ tout entier).

b. Supposons X compact et $f : X \to Y$ continue. Soit A un compact de Y. C'est donc un fermé de Y et, f étant continue, son image réciproque $f^{-1}(A)$ est un fermé de X. Comme X est compact, $f^{-1}(A)$ est un compact de X. Par suite f possède la propriété (P).

c. L'assertion " $\|x\| > R$ entraîne $\|f(x)\| > M$ " équivaut à " $\|f(x)\| \leq M$ entraîne $\|x\| \leq R$ ",
c'est-à-dire " $f(x) \in B_M$ entraîne $x \in B_R$ ", ou encore " $x \in f^{-1}(B_M)$ entraîne $x \in B_R$ ", soit finalement " $f^{-1}(B_M) \subset B_R$ ".
Dans la suite on prendra donc (P') sous la forme
(P") *pour tout* $M > 0$ *il existe* $R > 0$ *tel que* $f^{-1}(B_M) \subset B_R$.
Rappelons que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.
Si f vérifie (P), pour tout $M > 0$ l'image réciproque du compact B_M est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc borné, donc contenu dans une boule B_R pour R assez grand. C'est dire que f vérifie (P").
Réciproquement, si f vérifie (P"), soit A un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors A est borné, donc contenu dans une boule B_M, et $f^{-1}(A)$ est contenu dans $f^{-1}(B_M)$, donc dans la boule B_R donnée par (P"). Par suite $f^{-1}(A)$ est borné. Comme A est fermé et f continue, $f^{-1}(A)$ est également fermé. C'est donc un compact de $\mathbb{R}^n$, et f vérifie (P).

Remarques sur les copies

Barême détaillé : **1** = 3+2 , **2** = 2+2+3 , **3** = 2+4+4 . Total = 22.
[attribuer 4 à **3.b**, c'est bien sûr un cadeau pour ceux qui connaissent leur cours !]

Moyenne des 86 copies : 8,64. Histogramme très étalé, de 1 à 19.

1. Confusion fréquente : chercher $u^{-1}(S_2)$ au lieu de $u(S_\infty)$; ça donne une ellipse, ce qui semble rassurer certains.

2. Confusion fréquente entre vecteurs et scalaires, inégalités entre vecteurs, ce qui conduit certains à écrire des " $\left\| \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \right\|_2$ ", ou autres " $f(x) \leq k\ x$ " .
En **b**, confusion entre $f(B_1) \subset B_2$ et $f(B_1) = B_2$.
"Par équivalence des normes on a $\|f(x)\| \leq k\,\|x\|$, donc f est continue"... (mais f, la pauvre, n'est pas linéaire).
Vu plus d'une fois l'inégalité fantaisiste

$$\|\lambda x - \mu y\| \leq \max(|\lambda|, |\mu|)\, \|x - y\| \ ,$$

utilisée pour "démontrer" la continuité de f.

3.c. Surprise heureuse : bon usage du passage à la contraposée dans de nombreuses copies. Mais $f^{-1}(.)$ pour l'image réciproque reste mal compris, souvent confondu avec l'application réciproque. Exemples :

" $f(x) \in B$ donc $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(B)$ "

" $(f(x) \in B \Rightarrow x \in A)$ équivaut à $B \subset f(A)$ donc à $f^{-1}(B) \subset A$ ".