Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière) **28.11.05**

CORRIGÉ DU PARTIEL

1. Un peu de topologie.

a. La boule ouverte $B(2,1/2)$ est l'ensemble des $x>0$ tels que $\delta(x,2)<1/2$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$, ce qui équivaut à $x>1$. Donc $B(2,1/2)=]1,\infty[$.
De même $B(1,r)$ est l'ensemble des $x>0$ tels que $-r<\frac{1}{x}-1<r$, c'est-à-dire $1-r<\frac{1}{x}<1+r$. Deux cas se présentent :

- Si $r\geq 1$ il reste $x>0$ et $x>1/(1+r)$, d'où $B(1,r)=\left]\frac{1}{1+r},\infty\right[$.
- Si $0<r<1$ il vient $1/(1+r)<x<1/(1-r)$, d'où $B(1,r)=\left]\frac{1}{1+r},\frac{1}{1-r}\right[$.

b. *A n'est pas ouvert dans* (X,δ). Sinon il devrait contenir la boule ouverte $B(1,r)$ pour $r>0$ assez petit, ce qui est impossible d'après **a** (une telle boule contient des points $x>1$).
c. *A est fermé dans* (X,δ), car son complémentaire $X\backslash A=]1,\infty[$ est, d'après **a**, la boule ouverte $B(2,1/2)$.
d. *A n'est pas compact dans* (X,δ). Sinon, de la suite $x_n=1/n$ de A on pourrait extraire une sous-suite $(x_{\varphi(l)})$ convergeant vers un point x de A. Or $x_{\varphi(l)}=1/\varphi(l)$ et la distance

$$\delta(x_{\varphi(l)},x)=\left|\varphi(l)-\frac{1}{x}\right|$$

tend vers l'infini, non vers 0, quand l tend vers l'infini.
Variante. Si A était compact la fonction $x\mapsto\delta(x,1)$, continue sur le compact A, devrait être bornée, ce qui est faux puisque $\delta(1/n,1)=n-1$ tend vers l'infini.
e. Soit $f:X\to X$ définie par $f(x)=1/x$. C'est une bijection de X sur lui-même, d'application réciproque $f^{-1}=f$. L'égalité $d(f(x),f(y))=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\delta(x,y)$ montre la continuité de $f:(X,\delta)\to(X,d)$, et l'égalité $\delta(f^{-1}(x),f^{-1}(y))=|x-y|=d(x,y)$ montre la continuité de $f^{-1}:(X,d)\to(X,\delta)$. Par suite f est un homéomorphisme de (X,δ) sur (X,d).
Remarque. Comme $f(A)=[1,\infty[$ est fermé, non ouvert et non compact dans X muni de la distance usuelle, on retrouve ainsi les résultats de **b**, **c** et **d**.

2. Norme d'application linéaire.

a. La sphère unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est le carré de sommets $A=(1,1)$, $B=(-1,1)$, $C=-A$ et $D=-B$. Une application linéaire transforme un segment de droite en un segment de droite. L'image par u de ce carré est donc le parallélogramme de sommets

$$A'=\begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\ B'=\begin{pmatrix}3/2 & -1/2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix},$$

$C'=-A'$ et $D'=-B'$. La droite $A'B'$ a pour équation $y=2x+2$, ce qui permet de préciser le tracé.

b. La norme d'application linéaire de u est $\|u\| = \sup \|u(x)\|_1$, le sup étant pris sur les $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|x\|_\infty = 1$. C'est donc $\sup \|y\|_1$, où y parcourt les côtés du parallélogramme obtenu en **a**. Pour $y \in A'B'$ on a $y = (1-t)A' + tB'$, t variant de 0 à 1, d'où

$$\|y\|_1 \leq (1-t)\|A'\|_1 + t\|B'\|_1 = 5(1-t) + 4t = 5 - t$$

Le maximum sur ce côté est donc 5, atteint au sommet A' ($t = 0$). On voit de même que le maximum sur les autres côtés est $\|A'\|_1 = \|C'\|_1 = 5$. Par suite $\|u\| = 5$.

3. Calcul différentiel.
a. En résolvant le système d'équations $u = xy$, $v = xy^2$ aux inconnues x, y on obtient immédiatement l'équivalence

$$\left((x,y) \in U \text{ et } \left\{\begin{array}{c} u = xy \\ v = xy^2 \end{array}\right.\right) \iff \left((u,v) \in U \text{ et } \left\{\begin{array}{c} x = u^2/v \\ y = v/u \end{array}\right.\right) .$$

C'est dire que φ est une bijection de U sur U, inversée par $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (u^2/v, v/u)$. Les applications φ et φ^{-1} sont de classe C^1 sur U, donc *φ est un C^1-difféomorphisme de U sur lui-même.*
b. D'après **a** la fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^1 sur U.
En dérivant en x puis en y l'égalité $f(x,y) = g(xy, xy^2)$ on obtient

$$\partial_x f = y\partial_u g + y^2 \partial_v g = \frac{v}{u}\partial_u g + \frac{v^2}{u^2}\partial_v g$$
$$\partial_y f = x\partial_u g + 2xy\partial_v g = \frac{u^2}{v}\partial_u g + 2u\partial_v g \ ,$$

les dérivées de f étant calculées en (x,y) et celles de g au point correspondant $(u,v) = \varphi(x,y)$.
c. D'après **b** on a

$$2x\partial_x f - y\partial_y f = 2xy\partial_u g - xy\partial_u g = u\partial_u g \ .$$

Comme u ne s'annule pas sur U l'équation (*) équivaut à $\partial_u g(u,v) = 0$ sur U, c'est-à-dire à $g(u,v) = F(v)$, où $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction arbitraire continûment dérivable.* En revenant aux variables (x,y) du problème posé, on obtient sa solution générale sous la forme

$$f(x,y) = F(xy^2) \ .$$

d. L'équation de la tangente en $A = (1,1)$ à la courbe d'équation $f(x,y) = f(1,1)$ s'écrit

$$\partial_x f(A)(x-1) + \partial_y f(A)(y-1) = 0 \ ,$$

à condition que $\partial_x f(A)$ et $\partial_y f(A)$ ne soient pas simultanément nuls. Si f est solution de (*) on a $f(x,y) = F(xy^2)$ d'où $\partial_x f(x,y) = y^2 F'(xy^2)$, $\partial_y f(x,y) = 2xyF'(xy^2)$ et $\partial_x f(A) = F'(1)$, $\partial_y f(A) = 2F'(1)$. En supposant $F'(1) \neq 0$ l'équation de la tangente en A est donc $(x-1) + 2(y-1) = 0$, c'est-à-dire

$$x + 2y - 3 = 0 \ .$$

Variante. D'après l'équation (*) $\operatorname{grad} f(A)$ est orthogonal au vecteur $(2x, -y) = (2, -1)$. Si $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$ la tangente cherchée, orthogonale à $\operatorname{grad} f(A)$, est donc colinéaire à $(2,-1)$ d'où son équation sous la forme

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} \ ,$$

ce qui redonne le résultat précédent.

Remarques sur les copies.
En **1.a** il y avait lieu de s'inquiéter si on trouvait une boule $B(2, 1/2)$ ne contenant pas le point 2 ou une $B(1,r)$ ne contenant pas 1 ...
En **1.d** la suite des $1/n$ tend vers 0 au sens de la distance usuelle d, mais *ne converge pas au sens de la distance δ* : en effet $\delta(1/n, 1/p) = |n-p|$ ne tend pas vers 0 quand $n, p \to \infty$, donc ce n'est pas une suite de Cauchy pour δ. Erreur très fréquente !