Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière) **28.11.05**

EXAMEN PARTIEL

Durée : deux heures.
Sans documents. Les trois exercices sont indépendants.
Barême indicatif : **1** = 8 points, **2** = 4 points, **3** = 8 points.

1. Un peu de topologie. On considère l'espace métrique (X, δ), formé de l'intervalle $X =]0, \infty[$ muni de la distance

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

(on ne demande pas de vérifier que δ est une distance).
a. On note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ dans l'espace (X, δ). Déterminer $B(2, 1/2)$ et $B(1, r)$.
b. L'intervalle $A =]0, 1]$ est-il un ouvert de (X, δ) ?
c. A est-il un fermé de (X, δ) ?
d. A est-il un compact de (X, δ) ? [On pourra considérer la suite $x_n = 1/n$.]
e. Soit $d(x, y) = |x - y|$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. Montrer que (X, δ) est homéomorphe à (X, d).

2. Norme d'application linéaire. Soit u l'application linéaire définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ et $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.
a. Dessiner avec soin l'image par u de la sphère unité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$.
b. En déduire la norme d'application linéaire de $u : (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$.

3. Calcul différentiel. On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \text{ et } y > 0\}$.
a. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v)$, avec $u = xy$, $v = xy^2$, est une bijection de U sur lui-même et expliciter l'application réciproque φ^{-1}.
b. Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur U. On définit la fonction g par $f(x, y) = g(u, v)$, c'est-à-dire $f = g \circ \varphi$. Exprimer les deux dérivées partielles de f au moyen de celles de g.
c. En déduire la solution générale sur U de l'équation aux dérivées partielles

$$2x\partial_x f - y\partial_y f = 0 . \qquad (*)$$

d. Soient f une solution de l'équation (*) et C la courbe de niveau de f passant par le point $A = (1, 1)$, définie par l'équation $f(x, y) = f(1, 1)$. Écrire l'équation de la tangente en A à C.