Topologie et calcul différentiel
(plan de cours)

François Rouvière, 3/9/2004

Tout doit tenir en 72 heures (12 cours de 2h et 24 TD de 2h) ! Il ne faut donc pas hésiter à *admettre* tout théorème un peu délicat, à remplacer sa preuve par un argument heuristique ou l'étude d'un exemple.

On va entremêler topologie et calcul différentiel : les notions de topologie seront introduites peu à peu, au fur et à mesure des besoins en calcul différentiel (ainsi les espaces complets, en vue du point fixe, juste avant le théorème d'inversion locale). Ce mélange n'est pas gratuit : pour s'en convaincre sur un exemple élémentaire, relire la démonstration du théorème de Rolle...

Pour éviter que les équations différentielles, rejetées en fin de semestre, ne soient considérées comme un thème sans importance, pas vraiment au programme de l'examen (!), on pourrait, dès le début du semestre, inclure une petite équa. diff. dans chaque feuille de TD.

Les durées indicatives ci-dessous ne concernent que les cours.

TOPOLOGIE (= étude du lieu, analysis situs auraient dit nos Ancêtres ; 11h)

– **Espace métrique** (2h) : voisinage, ouvert, fermé, dense, continu, homéomorphisme (avec exemples concrets : surfaces, alphabet,...).
– **Compact (métrique)** (4h) :
  - définition par suites extraites, équivalence (admise) avec Borel-Lebesgue, un compact est "fini à ε près" (vision naïve de la précompacité)
  - image continue d'un compact, application à des résultats d'*existence* (extremum atteint : triangle de périmètre maximum inscrit dans une ellipse, perpendiculaire commune à deux cercles de $\mathbb{R}^3$, etc.), et à l'équivalence des normes en dimension finie
  - théorème de Heine, application à la continuité des intégrales à paramètre.
– **Norme d'application linéaire** (1h) :
  - application linéaire continue entre espaces normés, sa norme comme la meilleure constante telle que, ou comme sup sur la boule unité
  - pratiquement : apprendre à établir l'inégalité $\|u(x)\| \leq M\,\|x\|$, à trouver le meilleur M, à dessiner l'image par u de la boule unité...
– **Complet** (4h) :
  - suite de Cauchy, espace de Banach, de Hilbert
  - dans un Banach, toute série normalement convergente est convergente (cf. convergence "normale" de 2ème année)
  - un compact (métrique) est complet
  - prolongement par densité
  - théorème du point fixe (résultat d'*existence et unicité*, avec en prime une bonne méthode d'approximation).

CALCUL DIFFÉRENTIEL (13h)

Aucun Banach ici, on se limite à des applications définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

- **Différentielles** (3h) :
  - définition, dérivée selon un vecteur, dérivée partielle, gradient, jacobienne, cas de la variable complexe
  - critère pratique de différentiabilité (continuité des dérivées partielles)
  - différentielle d'une fonction composée (insister !!), difféomorphisme = changement de variables
  - illustration géométrique : vecteurs tangents à une surface définie implicitement, à une surface paramétrée.
- **Inégalité de la moyenne (ou des accroissements finis)** (1h) :
  - énoncé (démontré pour une fonction C^1 en écrivant l'accroissement comme une intégrale)
  - applications : fonction lipschitzienne sur un ouvert convexe, différentielle nulle entraîne constante (sur un ouvert convexe, on n'a pas eu le temps de parler de connexe en topologie !), critère de différentiabilité, différentiabilité de la limite d'une suite, unicité pour un système différentiel.
- **Fonctions inverses, fonctions implicites** (4h) :
  - théorème d'inversion locale, aperçu de la preuve par le point fixe, illustration graphique de cette méthode d'approximations successives ; version globale du théorème
  - application aux changements de coordonnées
  - théorème des fonctions implicites (déduit du précédent), calcul de la différentielle d'une fonction implicite
  - application aux surfaces de $\mathbb{R}^3$, aux courbes de $\mathbb{R}^2$ définies implicitement.
- **Dérivées secondes, problèmes d'extremum** (3h) :
  - différentielle seconde d'une fonction *numérique* de n variables réelles, hessienne, théorème de Schwarz (admis)
  - Taylor-Young, Taylor avec reste intégral, comparaison des deux ; apprendre à les expliciter, jusqu'à l'ordre deux au moins...
  - problème d'extremum libre : conditions nécessaires du 1er et du 2ème ordre, condition suffisante du 2ème ordre ; discussion en 2 variables, aspect des courbes de niveau
  - problème d'extremum lié : condition nécessaire, multiplicateurs de Lagrange, exemples.
- **Équations différentielles** (2h !!) $x' = f(t, x)$ avec $x(t_0) = a$; l'inconnue $x(t)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
  - définitions : solution, courbe intégrale, trajectoire, orbite, prolongement, solution maximale
  - théorème de Cauchy-Lipschitz, aperçu de démonstration par le point fixe
  - la solution maximale est-elle globale ? contre-exemple ; oui si elle est bornée, ou si $\|f(t, x)\|$ ne croît pas plus vite que $\|x\|$; exemples : systèmes linéaires, équation du pendule,...