Topologie et Calcul Différentiel (F. Rouvière) **Résumé de cours 2004-2005**

(cours fait en 12 amphis de 2 heures, un horaire clairement insuffisant)

I ESPACES MÉTRIQUES

But : "topologie", parler du lieu, pour comprendre l'espace où on travaille, la notion de points voisins, la continuité,...

1. Distances, normes
Exemples "concrets" : à Manhattan, en TGV, à la surface de la terre...
Déf : *distance, espace métrique* (X, d)
Conséquence utile (et méconnue !)

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

Déf : norme ; distance associée $d(x,y) = \|x - y\|$
Conséquence utile (et méconnue !)

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Normes classiques $\|x\|_2$, $\|x\|_1$, $\|x\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$

2. Topologie d'un espace métrique
Boule ouverte $B(a,r)$, boule fermée $B_f(a,r)$, sphère $S(a,r)$
Déf : *V voisinage de a* si contient une $B(a,r)$, $r > 0$. *Ouvert* : voisinage de chacun de ses points. *Fermé* : si complémentaire ouvert.
Exo corrigé : une boule ouverte est bien un ouvert.
Exo : une boule fermée est bien un fermé.
Propriétés (admises) X et $\varnothing$ sont ouverts. Stabilité des ouverts par réunion quelconque et intersection finie. Propriétés correspondantes des fermés.
Déf : Une *suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* X (application de $\mathbb{N}$ dans X) *converge* vers x si $d(x_k, x) \to 0$ càd si, pour tout voisinage V de x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les x_k pour $k \geq N$.
Déf : *Point adhérent* à une partie A de X : si limite d'une suite de points de A, càd si tout voisinage de ce point rencontre A. *Adhérence* $\overline{A}$ de A ; A *dense de* X si $\overline{A} = X$.
Exemple : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ par l'approximation décimale, ou parce que tout intervalle ouvert contient un rationnel.
Théorème (admis) Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Alors

1. $\overline{A}$ est un fermé contenant A
2. A est fermé ssi $\overline{A} = A$
3. A est dense dans X ssi tout ouvert (non vide) de X rencontre A.

3. Continuité
Déf : $f : X \to Y$ (espaces métriques) est *continue en* x_o si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ etc.
Traduction topologique : ... si, pour tout voisinage W de $f(x_o)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_o dans X tel que $f(V) \subset W$, càd encore si, pour tout W, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_o.

Ou encore : si, pour toute suite $x_k \to x_o$ dans X, on a $f(x_k) \to f(x_o)$ dans Y.
Théorème $f : X \to Y$, métriques. Equivalents :

1. f est continue sur X (i.e. en tout point de X)
2. pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X
3. idem avec les fermés.

Exemple : $f(x) = d(x, a)$ continue redonne $B(a, r)$ ouverte.
Application : Si f est une fonction *numérique* continue sur X, les ensembles définis par $f(x) = 0$, resp. $f(x) \geq 0$, resp. $f(x) \leq 0$, sont fermés. Pour $f(x) \neq 0$, resp. $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$, ce sont des ouverts.
Exemple : $1 < x^2 + y^2 < 2$ et $xy > 0$ définit un ouvert du plan.
Déf : *Homéomorphisme de* X sur Y (bijective, f et f^{-1}continues).
Alors les ouverts de X et Y se correspondent, d'où mêmes propriétés topologiques.
Contre-exemple : $f(x) = x$ de $\mathbb{R}$ (distance discrète) dans $\mathbb{R}$ (usuelle).
Exemple : $\mathbb{R}$ homéomorphe à $]-1, 1[$ par $f(x) = x/(1 + |x|)$ ou $\operatorname{th} x$
Exemple : Le disque pointé $0 < |z| < 1$ est homéomorphe au cylindre $u^2 + v^2 = 1$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$z = re^{i\theta} \longmapsto (u, v, w) = (\cos\theta, \sin\theta, f(r)) \ ,$$

où f est un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

II COMPACT

But : analogue dans un espace métrique des segments de $\mathbb{R}$. "Ramener l'infini au fini", d'où théorèmes sur les fonctions continues, théorèmes d'existence...

1. Notion de compact
Suite extraite (ou sous-suite) de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$: c'est $(x_{\varphi(l)})_{l\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.
Exemple : de $(x_k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, ...\right)$, suite des rationnels des $]0,1[$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers $\log 2$.
Déf (Fréchet, 1906) Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de toute suite de points de X on peut extraire une sous-suite convergente (vers un point de X).
Une partie A de X est dite *compacte* si l'espace métrique (A, d) est compact, i.e. de toute suite de points de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de A ("propriété de Bolzano-Weierstrass").
Théorème : Un compact est fermé. Un fermé d'un compact est compact.

2. Critères de compacité
Théorème : Les segments sont des compacts de $\mathbb{R}$. (preuve par dichotomie)
Théorème (admis) : Un produit de compacts est compact.
Théorème : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.
Exemple : $x^2 + 2y^2 \leq 1$ définit un compact du plan.
Théorème (admis !) : Soit A une partie de l'espace (X, d). Equivalents :
1. A est compacte
2. A possède la "propriété de Borel-Lebesgue", i.e. de tout recouvrement de A par des ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Application : Un compact est fini à ε près, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de points $a_1, ..., a_n$ de A tel que tout point de A soit à distance $< \varepsilon$ de l'un des a_i ("précompacité").

3. Compacité et continuité
Théorème : L'image continue d'un compact est compacte.
Application : une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
Exemple : triangle de périmètre maximum inscrit dans une ellipse.
Théorème (Heine, 1872) Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

4. Application à l'équivalence des normes
Théorème : Sur un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) toutes les normes sont équivalentes : il existe $m > 0$ et M tels que, pour tout x,

$$m\,\|x\| \leq \|x\|' \leq M\,\|x\| \;\text{ , i.e. } B'_f(0, m) \subset B_f(0, 1) \subset B'_f(0, M) \;.$$

Contre-exemple : $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ non équivalentes sur l'espace des polynômes.

III NORMES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

But : un bref chapitre pour introduire un dernier outil utile en calcul différentiel.

1. Applications linéaires continues
E, F espaces normés, $u : E \to F$ application linéaire.
Th Equivalents :
1. u est continue sur E
2. u est continue à l'origine
3. il existe une constante $M \geq 0$ telle que, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E \ .$$

Ces 3 propriétés sont toujours vraies quand l'espace de départ E est de dimension finie.

Interprétation géométrique. L'inégalité équivaut à $u(B_E(0,1)) \subset B_F(0,M)$.
Exemple. $u : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ définie par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'image de la boule unité est l'ellipse $x^2 - 2xy + y^2 \leq 1$, contenue dans la boule $B_\infty(0,M)$ ssi $M \geq \sqrt{2}$.

2. Norme d'application linéaire
Th E, F normés, $u : E \to F$ linéaire continue. La plus petite constante M telle que $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ est

$$M = \|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \ .$$

Ceci définit une norme sur l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues, dite *norme associée* à celles de E et F.

En pratique :
1. Une majoration du style $\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ montre u continue et $\|u\| \leq M$. Cela suffit souvent.
2. Le M optimal est $M = \|u\|$. Retenir que

$$\|u(x)\|_F \leq \|u\| \, \|x\|_E \ \text{ avec } \ \|u\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F \ .$$

Pour calculer $\|u\|$ étudier l'image par u de la sphère unité. Si $\dim E$ finie, elle est compacte et le sup est atteint : rechercher x_0 tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|u(x_0)\| = \sup ...$ Si $\dim E$ infinie, on pourra rechercher une suite (x_k) telle que $\|x_k\| = 1$ et $\|u(x_k)\| \to \sup ...$
3. Enfin $\|v \circ u\| \leq \|v\| \, \|u\|$.

IV DIFFÉRENTIELLES

But : généraliser $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et ses innombrables applications aux $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Plus de division par h ! Ecrire plutôt

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h) \ .$$

Insister sur l'interprétation géométrique de chaque terme de cette égalité.

1. Différentielle

$f : U \to \mathbb{R}^p$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ (munis de normes quelconques), i.e. $y_1 = f_1(x_1, ..., x_n)$,...., $y_p = f_p(x_1, ..., x_n)$.

Prop et déf f est différentiable en $a \in U$ si existe $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, linéaire, t.q. $f(a+h) - f(a) = L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$.

Si L existe, L est unique, notée $Df(a)$ (ou aussi $f'(a)$ ou encore $df(a)$...). Retenir que

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \|h\| \varepsilon(h) \ .$$

Signification de chaque terme de cette égalité. Notation $o(\|h\|)$ ou même $o(h)$ pour $\|h\| \varepsilon(h)$.
Cas d'une fonction vectorielle d'une variable ($n = 1$), vecteur dérivé ou vecteur vitesse.
Prop Si f diff. en a, alors pour $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = Df(a)v$$

(*dérivée de f en a selon le vecteur v*).
Dérivées partielles (cas $v = e_i$), $Df(a)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = f_i'(a)$ (notations usuelles).
Expression de la différentielle :

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \ .$$

Réciproque fausse : (voir TD) $f(x,y) = x^p y^q/(x^2+y^2)$ continue ssi $p+q > 2$, différentiable ssi $p+q > 3$.
Th Différentiabilité en a entraîne continuité en a et existence des dérivées partielles en a. (prouvé plus bas) Existence des $\partial_i f$ au voisinage de a, continues en a, entraîne différentiabilité en a.

Déf Application de classe C^1 sur U.
Cas d'une fonction numérique de variable vectorielle ($p = 1$), gradient (si $\mathbb{R}^n$ euclidien)

$$Df(a)h = \text{grad}\, f(a) \cdot h$$

Exo (TD) $\text{grad}(r^\alpha) = \alpha r^{\alpha-2} x$.
Notation différentielle. La fonction coordonnée $f_i(x) = x_i$ a pour différentielle en tout point la forme linéaire $h \mapsto h_i$, souvent notée dx_i (i.e. $dx_i(h) = h_i$), d'où l'écriture classique pour $p = 1$ (égalité de formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$) :

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) dx_n \ .$$

Matrice jacobienne d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$: sa i-ème ligne donne $Df_i(a)$, sa j-ème colonne donne $\partial_j f(a)$.

2. Premières propriétés des différentielles
Th (fonctions composées) $D(g \circ f)(a) = (x(t), y(t)) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.
(Preuve heuristique seulement, i.e. sans les ε...)
Pratiquement : effectuer le produit des jacobiennes ou retenir que, si $y = f(x)$, $z = g(y) = g \circ f(x)$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \ .$$

Exemple : passage en polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
Déf Difféomorphisme (ou changement de coordonnées) d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un autre. Alors

$$D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1} \ .$$

Exo (TD) : les coordonnées polaires donnent un difféomorphisme de $]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$ sur le plan fendu.

3. Application géométrique : tangente, plan tangent
a. Courbe plane. Soit $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$, dérivable en t_0, avec $\gamma'(t_0) = (x_0', y_0') \neq 0$. On définit la tangente au point $\gamma(t_0)$ comme la droite de direction $\gamma'(t_0)$ par ce point. Son équation est

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} \ .$$

Si la courbe est aussi définie par une équation implicite $f(x, y) = 0$, avec f différentiable en (x_0, y_0), on a (dans le plan euclidien)

$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) \perp \gamma'(t_0)$$

et l'équation de la tangente est

$$f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \ .$$

Exemple : ellipse.
b. Surface paramétrée. Si $(u, v) \mapsto F(u, v) = (x, y, z)$ est différentiable en (u_0, v_0), avec différentielle de rang 2, les tangentes aux courbes tracées sur la surface et passant par (x_0, y_0, z_0) appartiennent toutes au plan par ce point et défini par les vecteurs F_u' et F_v'.
Interprétation géométrique : tangentes aux *lignes coordonnées* tracées sur la surface.
Equation de ce plan, en annulant un déterminant.
c. Surface définie implicitement. Si $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ est différentiable en (x_0, y_0, z_0), de différentielle non nulle, les tangentes aux courbes tracées sur la surface $f(x, y, z) = 0$ et passant par (x_0, y_0, z_0) appartiennent toutes au plan d'équation

$$f_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \ .$$

Exemple : hyperboloïde.

4. Inégalité des accroissements finis (ou de la moyenne)
Comment remonter de Df à f ? Le classique $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ ne se généralise pas (voir $f(x) = (\cos x, \sin x)$ sur $[0, 2\pi]$).

Th Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en tout point de U, ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si le segment $[a, b]$ est contenu dans U on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\| \right) \|b - a\| \ .$$

Preuve simplifiée en supposant f de classe C^1.
Corollaire Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en tout point de U, ouvert *convexe* de $\mathbb{R}^n$. Si $\|Df(x)\| \leq k$ pour tout $x \in U$, alors f est k-lipschitzienne sur U i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

pour tous $x, y \in U$. En particulier f est constante sur U ssi sa différentielle y est identiquement nulle.
Application : preuve du critère de différentiabilité (dérivées partielles continues entraîne différentiable).

V COMPLET

But : montrer l'*existence* d'une limite sans la connaître a priori.

1. Définitions, exemples
Déf Suite de Cauchy (Augustin-Louis), espace métrique complet, partie complète d'un espace métrique.
Exemples : la suite des $S_k = \sum_{n=1}^{k} 1/n^2$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, mais pas celle des $\sum_1^k 1/n$.
Rappel : $\mathbb{R}$ est complet.
Déf Espace de Banach (Stefan).
Exemple important : Si X est compact $C(X, \mathbb{R})$, muni de la norme du sup, est un Banach. Ce serait faux avec la norme L^1 sur $[0,1]$ ($\rightarrow$TD ?).
Th Dans un Banach, toute série normalement convergente est convergente.

2. Critères de complétude
Th Un complet est fermé. Un fermé d'un complet est complet.
Th Un normé de dim finie est complet. (faux en dim infinie !)
Cor Dans un normé, un sous-espace de dim finie est fermé.
Th Un métrique compact est complet.

3. Théorème du point fixe
Th X métrique *complet*, F application de X *dans lui-même*, supposée *contractante* : il existe k, $0 \leq k < 1$ tel que
$$d(F(x), F(x')) \leq k d(x, x')$$
pour tous $x, x' \in X$.
Alors il *existe* un *unique* $a \in X$ tel que $F(a) = a$ ("point fixe" de F). De plus a est limite de la suite des *itérés*
$$x_0, x_1 = F(x_0), ..., x_{n+1} = F(x_n), ...$$
à partir d'un point quelconque x_0 de X, et on a
$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \ .$$

Contre-exemples : $F(x) = x/2$ sur $X =]0,1[$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,1]$ ou $X = [0, \infty[$.
On oublie une des trois hypothèses, tout s'effondre.

VI FONCTIONS INVERSES, FONCTIONS IMPLICITES

But : résoudre des systèmes d'équations "quelconques" !

1. Théorème d'inversion locale
Rappel ($n = 1$) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est C^1 sur l'intervalle ouvert I et si $f'(x) \neq 0$ partout sur I, alors f est un C^1-difféo. de I sur l'intervalle ouvert $J = f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ pour $y = f(x) \in J$.

Th U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'en un point a de U $Df(a)$ est inversible. Alors il existe V, ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et contenu dans U, tel que f (restreinte à V) soit un C^1-difféo. de V sur l'ouvert $W = f(V)$, càd

$$(x \in V \text{ et } f(x) = y) \iff (y \in W \text{ et } x = f^{-1}(y)) \ .$$

De plus $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$ pour $x \in V$, $y = f(x)$.

Remarques : nécessité de l'hypothèse $Df(a)$ inversible ! nécessité de restreindre f à V (voir $f(x) = x^2$) !
Heuristique du théorème : Si $b = f(a)$, l'équation $y = f(x) = b + Df(a)(x - a) + \cdots$ a la solution unique $x = a + (Df(a))^{-1}(y - b) + \cdots = f^{-1}(y)$.
Démonstration rigoureuse (aperçu) : Prendre $a = 0$, $f(a) = 0$ (pour simplifier), se ramener à un problème de point fixe

$$(f(x) = y) \iff (\varphi(x) = x) \text{ avec } \varphi(x) = x - (Df(0))^{-1}(f(x) - y) \ .$$

Alors, pour y voisin de 0, φ est contractante sur une petite boule (fermée) de centre 0...

2. Applications du théorème d'inversion
Th (changement de coordonnées) Soient $f_1, ..., f_n : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Les relations

$$u_1 = f_1(x_1, ..., x_n), ..., u_n = f_n(x_1, ..., x_n)$$

définissent un changement de coordonnées au voisinage de $a \in U$ ssi $\det\left(\partial f_i/\partial x_j\right)(a) \neq 0$. Si $\mathbb{R}^n$ euclidien, c'est dire que les vecteurs grad $f_1(a)$,..., grad $f_n(a)$ sont indépendants.

Exemple : Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(y - z)f'_x + (z - x)f'_y + (x - y)f'_z = 0.$$

On trouve les deux solutions particulières $u(x, y, z) = x + y + z$, $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. On les complète par $w(x, y, z) = x$ (par exemple !) et on vérifie que $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ est (localement) un changement de coordonnées qui simplifie l'équation en $g'_w = 0$, d'où la solution générale $f(x, y, z) = g(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

Th d'inversion globale U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose f njective sur U et $\det Df(x) \neq 0$ en tout point x de U. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to f(U)$ est un C^1-difféo. global.

3. Théorème des fonctions implicites

Th U ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. On suppose qu'en $(a,b) \in U$ ("point de départ") on a

$$f(a,b) = 0 \text{ et } D_y f(a,b) \text{ inversible, i.e. } \det(\partial f_i/\partial y_j)(a,b) \neq 0 \ .$$

Alors le système d'équations $f(x,y) = 0$ peut être (localement) résolu par rapport à y : il existe V, ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a), W (ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant b), avec $V \times W \subset U$, et $\varphi : V \to W$, de classe C^1, unique, tels que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)) \ .$$

De plus $D_y f(x,y)$ est inversible en tout $(x,y) \in V \times W$, ce qui permet le calcul de $D\varphi(x)$.

φ est la "fonction implicite" définie par f au voisinage de (a,b).

Remarques : L'hypothèse porte sur les dérivées des équations par rapport aux variables que l'on veut en sortir. Nécessité de se restreindre à une petite boîte $V \times W$. Ne pas oublier de s'assurer d'un point de départ (exemple $x^2 + y^2 + 1 = 0$...) !

Différentielle de la fonction implicite : On peut calculer $D\varphi$ sans connaître φ ! Reporter φ dans les équations qu'elle vérifie (identiquement pour $x \in V$), et dériver par rapport à x_i.
Exemple

$$x^3 + 2y^3 - 3xyz = 0 \ , \ x^2 + xy - xz - z^2 = 0$$

donne $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ au voisinage de $(1,1,1)$, avec $\varphi'(1) = \psi'(1) = 1$.
Heuristique du théorème : Si $f(a,b) = 0$ l'équation

$$f(x,y) = D_x f(a,b)(x-a) + D_y f(a,b)(y-b) + \cdots = 0$$

admet la solution unique

$$y = \varphi(x) = b - (D_y f(a,b))^{-1} D_x f(a,b)(x-a) + \cdots$$

Démonstration rigoureuse : $(f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (F(x,y) = (x,0))$ avec $F(x,y) = (x, f(x,y))$, et appliquer l'inversion locale à F sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

4. Application géométrique

U ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $S = f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \in U \mid f(x,y,z) = 0\}$ la "surface d'équation $f = 0$".
Th On suppose $Df(x,y,z) \neq 0$ en tout point (x,y,z) de S. Alors
(i) Localement, S peut être transformée en un plan par changement de coordonnées.
(ii) Localement, S est le graphe d'une fonction C^1.
(iii) Les tangentes en $A = (a,b,c)$ aux courbes tracées sur S constituent le plan tangent d'équation

$$f'_x(A)(x-a) + f'_y(A)(y-b) + f'_z(A)(z-c) = 0 \ .$$

VII DÉRIVÉES SECONDES, PROBLÈMES D'EXTREMUM

But : améliorer l'approximation au premier ordre donnée par la différentielle, appliquer cela à la recherche explicite de maxima ou minima.

1. Différentielle seconde
Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}$ (pour simplifier), différentiable en tout point de U.
Déf Si $Df : U \to \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, on dit que f est deux fois différentiable en a. On note $D^2f(a)$ la différentielle seconde, donnée par la *matrice hessienne.* Fonction de classe C^2 sur U.
Théorème de Schwarz Si f est deux fois différentiable en a, sa matrice hessienne est symétrique.
Idée de la preuve : On peut montrer que

$$f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) = D^2f(a)(h,k) + \|h\|\,\|k\|\,\varepsilon(h,k) \ ,$$

et le premier membre est évidemment symétrique. On a noté

$$(h,k) \longmapsto D^2f(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$$

la forme bilinéaire associée à $D^2f(a)$.
Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites admettent des versions de classe C^2 (ou C^k, plus généralement).

2. Formule de Taylor
Th (*Taylor-Young*) Si f est deux fois différentiable en a

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \frac{1}{2} D^2f(a)(h,h) + \|h\|^2\,\varepsilon(h) \ .$$

(démontrée pour f de classe C^2).

Th (*Taylor avec reste intégral*) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et si $[a, a+h] \subset U$, on a

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \int_0^1 (1-t) D^2f(a+th)(h,h)\ dt \ .$$

3. Problèmes d'extremum (libre)
Déf Maximum global, ou local, strict ou non, pour $f : U \to \mathbb{R}$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$).
Th (*conditions nécessaires, condition suffisante, d'extremum local*)
(i) CN pas S : Si f a un extremum local en a et si $Df(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$.
(ii) CN pas S : Si f a un minimum local en a et si $D^2f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
(iii) CS pas N : Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)(h,h) > 0$ pour tout $h \neq 0$, alors f admet en a un minimum local strict.

Discussion en deux variables : aspect local de la surface $z = f(x,y)$ et de ses courbes de niveau lorsque $Df(a) = 0$, discutée selon les signes de $\det D^2f(a)$ et $\operatorname{tr} D^2f(a)$.

VIII ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Introduction :
Evocation d'exemples : $x' = -\sqrt{|x|}$ (équa. diff. du seau percé), $x' = x - xy, y' = -y + xy$ (requins/sardines, lapins/chasseurs,...), $\theta'' = -\sin\theta$ (pendule), $x'' = -(k/r^3)x$ (mouvement des planètes).
Problème général : $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = u$, avec f et u donnés.
Questions théoriques : existence d'une solution, domaine de définition d'icelle, unicité (déterminisme : le présent détermine le passé et l'avenir !), influence de perturbations (de u ou de f), positions d'équilibre, stabilité,...
Questions pratiques : expliciter la solution, à défaut approximation numérique, étude qualitative, allure graphique.

1. Solutions, solutions maximales
Données : U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, u) \in U$. On étudie

$$x' = f(t,x) \ , \ x(t_0) = u \ . \tag{1}$$

Déf Une *solution* c'est (I,x), où I est un intervalle contenant t_0 et $x : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable, avec $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et (1).
Ne pas confondre *courbe intégrale* (graphe d'une solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$), et *trajectoire* ou *orbite* (sa projection sur $\mathbb{R}^n$, en oubliant le temps qui passe...). Pour un système *autonome* $x' = f(x)$, le dessin des trajectoires est facilité en représentant le champ de vecteurs $f(x)$.
Déf La solution (J,y) *prolonge* la solution (I,x) si $J \supset I$ et $y(t) = x(t)$ pour $t \in I$. Une solution est *maximale* si elle n'admet aucun prolongement à un intervalle plus grand.

Exemple 1 : $x' = x, x(0) = 1$ donne $x(t) = e^t, t \in \mathbb{R}$, évidemment maximale.
Exemple 2 : $x' = x^2, x(0) = 1$, étude détaillée. Solution au brouillon en écrivant $x'/x^2 = 1$ sans état d'âme, puis solution rigoureuse : Soit (I,x) une solution, sur un intervalle I contenant 0 et où $x(t)$ ne s'annule pas. Alors nécessairement $1/x(t) = 1 - t$ pour $t \in I$, donc $1 \notin I$ et $x(t) = 1/(1-t)$ pour $t \in I$. Le I maximal est donc $]-\infty, 1[$. Noter l'*explosion* (inattendue !) pour $t = 1$.

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz
Th U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Alors pour chaque $(t_0, u) \in U$ le problème (1) admet une *solution maximale unique*. Son intervalle de définition est *ouvert*.

Commentaires : Par tout point de U passe une et une seule courbe intégrale ; ces courbes ne se rencontrent pas ! Le théorème se garde bien de préciser l'intervalle de définition de la solution !
Exemple 1 : $x' = x^2, x(t_0) = u$ (encore). La solution maximale est $x(t) = \frac{u}{1-(t-t_0)u}$ sur $I =]-\infty, t_0 + \frac{1}{u}[$ si $u > 0$, $I =]t_0 + \frac{1}{u}, \infty[$ si $u > 0$, $I = \mathbb{R}$ si $u = 0$. Tracé des courbes intégrales.
Exemple 2 : $x' = -\sqrt{|x|}$. Pour toute constante a, la fonction $x(t) = (a-t)^2/4$ si $t < a$, $x(t) = 0$ sinon, est solution. Les courbes intégrales se rencontrent, Cauchy-Lipschitz pas applicable. Interprétation : quand un seau d'eau (percé) est vide, comment savoir s'il était plein il y a une heure, ou il y a six mois, ou s'il ne l'a jamais été ?
Idées sur la preuve du théorème : pourquoi un I maximal est ouvert, comment on se ramène à un problème de point fixe $F(x) = x$ pour l'opérateur intégral

$$F(x)(t) = u + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \ ,$$

résolu par approximations successives.
Exemple : pour $x' = x, x(0) = 1$, on obtient les $x_p(t) = 1 + t + \cdots + \frac{t^p}{p!}$ pour approximations successives.

3. Exemple de l'équation autonome $x' = f(x)$
Étude détaillée de $x' = 1 + x^2$. L'intervalle maximal est cette fois de longueur π.
Étude générale de $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, en supposant $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive, et $x_0 \in]a, b[$. Le problème admet une solution maximale unique, définie sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$ avec

$$\alpha = t_0 - \int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)} \ , \ \beta = t_0 + \int_{x_0}^{b} \frac{ds}{f(s)} \ .$$

La solution est donc globale, i.e. $]\alpha, \beta[= \mathbb{R}$, ssi ces deux intégrales divergent.
Complément : Soit $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, en supposant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, s'annulant en un nombre fini de points. Alors entre deux zéros de f les solutions maximales sont globales. Exemple : $x' = x(1 - x)$.

Ici s'arrête le programme de l'examen.

4. Domaine de la solution maximale : un critère général
Th Soit le sytème différentiel $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, avec $f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, $t_0 \in]a, b[$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $x :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution définie sur l'intervalle $]\alpha, \beta[$. Si $\beta < b$ et si cette solution est *bornée* sur $]\alpha, \beta[$, alors elle est prolongeable au-delà de β.
Autrement dit : Si la solution *maximale* est *bornée* sur son intervalle de définition, elle est *globale,* i.e. $]\alpha, \beta[=]a, b[$.
Autrement dit : Si la solution maximale n'est pas globale, elle n'est pas bornée : il y a "explosion".

Application : les solutions d'un système différentiel linéaire (à coefficients variables) sont globales.
Au passage, on montre une version du
Lemme de Gronwall Si $x : I = [t_0, t_1[\to \mathbb{R}^n$ est dérivable et vérifie pour $t \in I$

$$\left\| x'(t) \right\| \leq A \left\| x(t) \right\| + B$$

avec $A > 0$ et B constants, alors, pour t$\in I$,

$$\left\| x(t) \right\| \leq \left\| x(t_0) \right\| e^{A(t-t_0)} + \frac{B}{A} \left(e^{A(t-t_0)} - 1 \right) \ .$$

THAT'S ALL, FOLKS !