THÉORÈME DE BAIRE ET APPLICATIONS

F. Rouvière, février 2004

Table des matières

En vue de l'oral d'analyse de l'agrégation, on s'efforcera d'assimiler les théorèmes de Baire, de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte (Théorèmes 1, 6 et 7 ci-dessous) et au moins une illustration de chacun d'eux. Cela pourra servir dans les leçons 202 (parties denses), 205 (espaces complets), 209 (utilisation de la dénombrabilité), 210 (applications linéaires continues), 228 (continuité ou dérivabilité des fonctions), 246 (séries de Fourier), entre autres.

1 Le théorème de Baire

René Baire (1874-1932) démontra ce résultat en 1899. Bien que l'Américain William Osgood l'ait obtenu aussi dès 1898, c'est pourtant le nom du Français Baire que lui a attaché la postérité. Ce théorème étonnamment simple (voir sa preuve) est un outil puissant en analyse, aux conséquences parfois surprenantes.

Les assertions (i) et (ii) sont deux versions équivalentes du théorème de Baire ; quant à (iii), souvent utilisée, c'est une forme affaiblie de (ii).

Théorème 1 *Dans un espace métrique* complet *(non vide)*
(i) *toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense*
(ii) *toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide*
(iii) *si l'espace entier est réunion dénombrable de fermés, l'un au moins de ces fermés contient un ouvert (non vide).*

"Intersection dénombrable de ..." est une abréviation pour "intersection d'une famille finie ou dénombrable de ...". Idem pour réunion dénombrable.

L'équivalence de (i) et (ii) se voit par passage au complémentaire, puisqu'une partie A est dense si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide : dire que tout ouvert rencontre A revient à dire qu'aucun ouvert n'est contenu dans le complémentaire de A.

Dans la pratique du théorème de Baire, le choix des ouverts ou des fermés auquel on l'applique exige parfois de faire preuve d'imagination...

Exemple 1. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable : Baire en donne une nouvelle preuve, en appliquant (iii) aux fermés réduits à un point (voir aussi la remarque 1 ci-dessous). De même $\mathbb{R}^2$ n'est pas réunion dénombrable de droites, ni de cercles, de paraboles...

Mais l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est évidemment réunion dénombrable de points. Les assertions du théorème peuvent donc être fausses si on omet l'hypothèse *complet.* Voir cependant la remarque 2.

Par passage aux complémentaires l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ des irrationnels est intersection dénombrable d'ouverts denses. Mais il n'est pas réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (sinon $\mathbb{R}$, réunion de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ le serait aussi). En passant à nouveau aux complémentaires, on voit donc que $\mathbb{Q}$ *n'est pas intersection dénombrable d'ouverts de* $\mathbb{R}$ (de tels ouverts, contenant $\mathbb{Q}$, seraient forcément denses). On verra une application à l'Exemple 4.

Exemple 2. *Un Banach est de dimension finie ou non dénombrable.* Autrement dit *un espace vectoriel normé E qui admet une base infinie dénombrable* (par exemple l'espace des polynômes) *ne saurait être complet* ([G] p. 393).
Soit en effet E_n le sous-espace de E engendré par les n premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base. D'une part E_n est fermé dans E (car de dimension finie, donc complet). D'autre part E_n est d'intérieur vide : s'il contenait une boule $\|x-a\|<r$, il contiendrait la boule $\|x\|<r$ par translation, donc l'espace entier par homothétie ; alors $E=E_n$ serait de dimension finie. Le théorème de Baire interdit alors à l'espace E, réunion dénombrable des E_n, d'être complet. Le résultat s'applique notamment au Hilbert ℓ^2, ce qui ne l'empêche pas d'avoir une base *hilbertienne* dénombrable ! Ne pas confondre base au sens algébrique (tout vecteur est alors combinaison linéaire *finie* de vecteurs de la base) et base hilbertienne (tout vecteur est alors *limite* de combinaisons linéaires finies de vecteurs de la base).

Preuve du théorème de Baire. ([B] p. 15, [G] p. 392, [L] p. 191, [TM] p. 127,...). On note d la distance de X et $B(x,r)$, resp. $\overline{B}(x,r)$, l'ensemble des y tels que $d(x,y)<r$, resp. $d(x,y)\leq r$.[1]

Pour établir (i), soient $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts denses de X et V un ouvert non vide de X.
- Comme Ω_1 est dense, l'ouvert $V\cap\Omega_1$ contient une boule fermée $\overline{B}_1=\overline{B}(x_1,r_1)$, et on peut supposer $0<r_1<1$.
- Comme Ω_2 est dense, la boule ouverte B_1 rencontre Ω_2, d'où une boule fermée $\overline{B}_2$ telle que $\overline{B}_2=\overline{B}(x_2,r_2)\subset B_1\cap\Omega_2$, et on peut supposer $0<r_2<1/2$.
- Par récurrence, on construit ainsi[2] des boules ouvertes emboîtées B_n telles que, pour $n\geq 2$,

$$B_n \subset \overline{B}_n = \overline{B}(x_n,r_n) \subset B_{n-1}\cap\Omega_n \subset B_{n-1}\ ,$$
$$\text{et } 0<r_n<1/n\ .$$

Leurs centres x_n forment une suite de Cauchy : si $p\geq n$ on a $x_p\in B_n$, id est $d(x_n,x_p)<1/n$. Comme X est complet, la suite (x_n) converge vers une limite x. Comme $x_p\in\overline{B}_n$ pour $p\geq n$, à la limite on a $x\in\overline{B}_n\subset\Omega_n$ pour tout $n\geq 1$, et aussi $x\in\overline{B}_1\subset V$ (c'est pour cela que l'on a introduit des boules fermées). Par suite l'ouvert V rencontre l'intersection de tous les Ω_n au point x, ce qu'il fallait. Facile, n'est-ce pas ? ∎

Remarque 1. Il est instructif de reprendre cette démonstration dans le cas simple où $X=\mathbb{R}$ et Ω_n est le complémentaire d'un point a_n de $\mathbb{R}$ (Exemple 1 ci-dessus). Soit donc $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite donnée de $\mathbb{R}$; il existe un intervalle fermé I_1 de longueur ℓ_1 (avec $0<\ell_1<1$) ne contenant pas a_1. Puis il existe $I_2\subset I_1$, de longueur $0<\ell_2<1/2$, ne contenant pas a_2 (ni bien sûr a_1), et cetera. Les centres x_n des intervalles emboîtés I_n forment une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Sa limite x appartient à tous les I_n ; on a ainsi construit un point x de $\mathbb{R}$ distinct de tous les a_n, par suite $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarque 2. ([D] p. 83) Un regard sur la preuve ci-dessus montre que le théorème de Baire reste valable si X, sans être lui-même complet, est un *ouvert d'un espace métrique complet* (par exemple un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ etc.).

Corollaire 2 *Soient X un espace métrique complet qui est réunion dénombrable de fermés F_n. Alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de X.*

---

[1] *Attention* : la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ n'est pas toujours la fermeture $\overline{B(x,r)}$ de la boule ouverte $B(x,r)$! Voir $X=\mathbb{Z}$ avec la distance usuelle, où $\overline{B(0,1)}=\{0\}$ et $\overline{B}(0,1)=\{-1,0,1\}$. Mais on a toujours $\overline{B(x,r)}\subset\overline{B}(x,r)$, et l'égalité si X est un espace normé.

[2] Il est, comme toujours, recommandé de suivre la construction en dessinant quelques patates.

Ce corollaire servira dans la preuve du Théorème 4.
Preuve. ([G] p. 392) Soient Ω la réunion des intérieurs et $F'_n = F_n \cap (X \backslash \Omega)$. Chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide de X : si un ouvert est contenu dans F'_n, il est contenu dans F_n, donc dans son intérieur, donc dans Ω, ce qui lui interdit d'être dans $X \backslash \Omega$! D'après le théorème de Baire la réunion des F'_n ne peut alors contenir aucun ouvert. Or, X étant réunion des F_n, la réunion des F'_n est $X \backslash \Omega$. Par suite Ω est dense dans X.

2 Application aux fonctions continues

Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace métrique dans un autre. L'*oscillation* de f en $x \in X$ est un outil commode pour évaluer le degré de discontinuité de f en ce point. Par définition, c'est le nombre (positif ou nul)

$$\omega_f(x) = \inf_V \delta(f(V)) \ ,$$

où l'inf porte sur tous les voisinages V de x dans X, et où

$$\delta(f(V)) = \sup_{y,z \in V} d(f(y), f(z))$$

est le *diamètre* dans Y de l'image $f(V)$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Calculer $\omega_f(x)$ pour tout x.

Proposition 3 *Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace métrique dans un autre.*
(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $\omega_f(x) < \varepsilon$ est un ouvert de X.
(ii) L'application f est continue au point x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.

Mais l'ensemble des points tels que $\omega_f(x) > \varepsilon$ n'est pas en général un ouvert (voir l'Exercice 3).
Preuve. ([G] p. 60, [TM] p. 248) (i) L'inégalité $\omega_f(x) < \varepsilon$ équivaut à l'existence d'un voisinage V de x (que l'on peut supposer ouvert) tel que $\delta(f(V)) < \varepsilon$. Prenons $x' \in V$; alors V est aussi un voisinage de x', d'où $\omega_f(x') \leq \delta(f(V)) < \varepsilon$. Par suite V est contenu dans l'ensemble des points où l'oscillation de f est $< \varepsilon$.

(ii) La définition de la continuité de f au point x (fixé) peut s'écrire : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe V, voisinage de x, tel que

$$\sup_{y \in V} d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \ .$$

Or l'inégalité triangulaire $d(f(y), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(x), f(z))$ donne, en passant au sup en y et z sur V,

$$\frac{1}{2}\delta(f(V)) \leq \sup_{y \in V} d(f(x), f(y)) \leq \delta(f(V)) \ .$$

La continuité de f en x revient donc à dire que $\delta(f(V))$ est arbitrairement petit, i.e. $\omega_f(x) = 0$. ■

Exemple 4. D'après la proposition f est continue en x si et seulement si $\omega_f(x) < 1/n$ pour tout entier $n \geq 1$. L'ensemble des points de continuité d'une application quelconque est donc une intersection dénombrable d'ouverts.
Par suite ([ZQ] p. 258) il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue aux points rationnels et discontinue aux points irrationnels ($\mathbb{Q}$ n'est pas intersection dénombrable d'ouverts, voir Exemple 1).
Mais la fonction $f(x) = 0$ si x irrationnel, $f(x) = 1/q$ si x est un rationnel p/q (fraction irréductible à dénominateur positif) est *continue aux irrationnels et discontinue aux rationnels* ([G] p. 108, [TM] p. 238, [ZQ] p. 259). Chaque rationnel p/q est en effet limite d'une suite d'irrationnels (par exemple les $(p/q) + 10^{-n}\sqrt{2}$), donc f n'est pas continue en ce point.

D'autre part, si x est irrationnel et si x_n converge vers x il suffit, pour montrer la convergence de $f(x_n)$ vers $f(x)$, de considérer les points rationnels de la suite (x_n), disons p_n/q_n (écrits sous forme de fractions irréductibles, avec $q_n \geq 1$). Comme $f(x) = 0$ et $f(p_n/q_n) = 1/q_n$ il s'agit de montrer que la suite des dénominateurs q_n tend vers l'infini. Si ce n'était pas le cas, elle admettrait une sous-suite bornée $q_{n(k)}$; comme $p_{n(k)}/q_{n(k)}$ est une suite convergente les numérateurs $p_{n(k)}$ seraient bornés aussi, les entiers $p_{n(k)}$, $q_{n(k)}$ ne pourraient prendre qu'un nombre fini de valeurs et les quotients $p_{n(k)}/q_{n(k)}$ ne sauraient converger vers un irrationnel !

Théorème 4 *Une limite simple de fonctions continues sur un complet est continue sur une partie dense.*

De façon plus détaillée, l'énoncé du théorème est : soient X, Y deux espaces métriques, avec X *complet*, et (f_n) une suite d'applications *continues* de X dans Y. On suppose l'existence de $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour chaque $x \in X$ (*convergence simple sur* X). Alors *il existe une partie dense de* X *sur laquelle* f *est continue.* Cet étonnant résultat, conséquence du théorème de Baire, montre la puissance de cet outil.

Preuve du théorème 4. ([G] p. 393 ; voir aussi [GT] p. 40, [MV] p.11, [TM] p. 249, [ZQ] p.260). On va appliquer deux fois le théorème de Baire.
a. Pour k, n entiers, $k \geq 1$, soit

$$F_{k,n} = \bigcap_{p,q\geq n} \left\{ x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k} \right\} .$$

Les applications f_p, f_q étant continues chaque ensemble $\{\cdots\}$ est un fermé de X, donc aussi leur intersection $F_{k,n}$. Fixons k dans un premier temps. D'après la convergence simple sur X des f_p vers f, l'ensemble X est réunion des $F_{k,n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (écrire le critère de Cauchy). Par suite (Corollaire 2 du théorème de Baire) la réunion des intérieurs, soit

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n} ,$$

est un ouvert dense de X.
b. Soit $x \in \Omega_k$. Par définition de cet ensemble il existe n et un voisinage V de x tel que, pour tous $p, q \geq n$ et tout $y \in V$,

$$d(f_p(y), f_q(y)) \leq \frac{1}{k}$$

d'où, en prenant $p = n$ et faisant tendre q vers l'infini,

$$d(f_n(y), f(y)) \leq \frac{1}{k} .$$

Ceci vaut en particulier pour $y = x$ d'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &\leq \frac{2}{k} + d(f_n(x), f_n(y)) . \end{aligned}$$

Comme f_n est continue en x on peut, quitte à rétrécir le voisinage V, supposer que l'on a aussi $d(f_n(x), f_n(y)) \leq 1/k$. Par suite *tout* $x \in \Omega_k$ *admet un voisinage* V *tel que* $d(f(x), f(y)) \leq 3/k$ *pour* $y \in V$.
c. Par une nouvelle application de Baire l'ensemble $\Omega = \bigcap_{k\geq 1} \Omega_k$ est dense dans X. Pour $x \in \Omega$ et tout $k \geq 1$ il existe V, voisinage de x, tel que $d(f(x), f(y)) \leq 3/k$. C'est dire que f est continue en x. ■

Exemple 5. ([G] p. 393) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée f' est continue sur un ensemble dense, puisque

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$$

et que, f étant dérivable, les fonctions entre parenthèses sont continues.
Mais il existe des fonctions partout dérivables à dérivée discontinue sur une partie dense ([G] p. 233), par exemple

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n)$$

pour $0 \leq x \leq 1$, où $\varphi(x) = x^2 \sin(1/x)$ et où $r_1, \ldots, r_n, \ldots$est une énumération des rationnels compris entre 0 et 1. Cette fonction est dérivable en tout point de $[0,1]$ et sa dérivée est continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel.

Exercice 6. La fonction caractéristique $\chi_{\mathbb{Q}}$ est-elle limite d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$? Montrer qu'elle est limite de limites de fonctions continues : on pourra considérer

$$\lim_{p \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} (\cos \pi p! x)^{2n} \right) .$$

Exercice 7. ([G] p. 394, [MV] p. 11, [TM] p. 129) Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, continue. On suppose que pour tout $a > 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(na) = 0 .$$

Montrer que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.
[Pour $\varepsilon > 0$ donné, on pourra appliquer le théorème de Baire aux fermés $F_p = \{a \geq 0, |f(na)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq p\}$.]

Exercice 8. ([N] p. 9) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière (i.e. holomorphe partout). Si, en chaque point de $\mathbb{C}$, l'une au moins des dérivées successives de f s'annule, alors f est un polynôme. Les amateurs de quantificateurs auront plaisir à écrire ce résultat sous la forme

$$\left(\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z) = 0 \right) \Longrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f^{(n)}(z) = 0 \right) .$$

[Appliquer le théorème de Baire aux fermés $F_n = \{z \in \mathbb{C}, f^{(n)}(z) = 0\}$.]
Ce même résultat est valable aussi pour les fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ("théorème de Sunyer i Balaguer"), mais sa démonstration est plus délicate ([G] p. 396).

Théorème 5 *Soit $I = [0,1]$. L'ensemble des fonctions continues sur I qui ne sont dérivables en aucun point de I est dense dans l'espace $C(I)$ (muni de la norme de la convergence uniforme).*

Preuve. Voir [G] p. 395, [GT] p. 39 ou [ZQ] p. 263.
La fonction monstrueuse ([ZQ] p. 261)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \{2^n x\}$$

(où $\{x\}$ désigne la distance de x à l'entier le plus proche), continue et nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$, est donc loin d'être exceptionnelle.

3 Application aux espaces de Banach

Théorème 6 (Banach-Steinhaus) *Soient X un espace de* Banach*, Y un espace normé, et $u_n : X \to Y$ des applications* linéaires continues.
(i) Si la suite (u_n) est "simplement bornée", elle est uniformément bornée sur la boule unité, i.e. bornée en norme d'application linéaire. Autrement dit : l'hypothèse

$$\forall x \in X, \exists M_x, \forall n, \|u_n(x)\| \leq M_x$$

entraîne

$$\exists M, \forall x \in X, \forall n, \|u_n(x)\| \leq M \|x\| .$$

(ii) Une limite simple d'applications linéaires continues d'un Banach dans un normé est continue. Autrement dit : si chaque u_n est linéaire continue sur X et si $u_n(x) \to u(x)$ pour chaque $x \in X$, alors u est continue sur X. De plus la conclusion de (i) est valable pour les u_n.

Contre-exemples. Dans la situation (ii), il n'y a pas nécessairement convergence des u_n vers u au sens de la norme d'application linéaire : sur l'espace de Banach ℓ^1 des séries absolument convergentes $u = (u_n)$ de $\mathbb{C}$, les formes linéaires continues $f_n(u) = u_n$ convergent simplement vers 0 (façon pédante de dire que le terme général d'une série convergente tend vers zéro...), mais sont de norme 1.

Sur l'espace c des suites complexes $u = (u_n)$ nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme induite par ℓ^∞, les formes linéaires $f_n(u) = \sum_{p=0}^n u_p$ sont continues, convergent simplement vers $f(u) = \sum_{p=0}^\infty u_p$, mais f n'est pas continue sur c. Il est vrai que c n'est pas un espace de Banach...

Preuve du théorème 6. ([B] p. 16, [G] p. 398) (i) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons

$$F_k = \{x \in X, \forall n, \|u_n(x)\| \leq k\} \ .$$

- chaque F_k est fermé dans X, car les u_n sont continues.
- X est la réunion (croissante) de tous les F_k, $k \geq 0$, car $x \in F_k$ dès que $k \geq M(x)$.
D'après Baire, un F_k au moins contient une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ avec $r > 0$, autrement dit les applications u_n sont uniformément bornées par k sur cette boule. Il n'y a plus qu'à se ramener à la boule unité par translation et homothétie : si $\|x\| \leq 1$, alors le point $y = a + rx$ appartient à $\overline{B}(a, r) \subset F_k$ d'où, pour tout n,

$$\begin{aligned} \|u_n(x)\| &= \left\| u_n\left(\frac{y-a}{r}\right) \right\| = \frac{1}{r} \|u_n(y) - u_n(a)\| \\ &\leq \frac{2}{r} k = M \ , \end{aligned}$$

puisque y et a appartiennent à $\overline{B}(a, r)$. Ceci établit (i).
(ii) [On pourrait appliquer ici le Théorème 4, mais il est plus simple de raisonner directement.] La convergence simple de u_n vers u entraîne que la suite $(u_n(x))$ est bornée pour chaque $x \in X$. D'après (i), il existe M tel que $\|u_n(x)\| \leq M \|x\|$ pour tout n et tout x. En passant à la limite pour $n \to \infty$, on en déduit

$$\|u(x)\| \leq M \|x\| \ ,$$

d'où la continuité de u. ∎

Exemple 9. ([GT] p. 86) Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée de nombres complexes. Si pour toute suite $b = (b_n)$ dans ℓ^2 la série $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ converge, alors a est aussi dans ℓ^2.
Soit en effet S_N la forme linéaire sur ℓ^2 définie par

$$S_N(b) = \sum_{n=0}^N a_n b_n \ .$$

Par hypothèse les S_N convergent simplement sur ℓ^2. D'après le théorème de Banach-Steinhaus il existe $M > 0$ tel que $\|S_N\| \leq M$ pour tout N (norme d'application linéaire). Comme

$$\|S_N\| = \left(\sum_{n=0}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

(calcul facile) on en déduit $a \in \ell^2$ en faisant tendre N vers l'infini.
Ne pas confondre ce résultat avec le théorème de Riesz, d'après lequel toute forme linéaire *continue* sur ℓ^2 s'écrit $b \mapsto \sum a_n b_n$ avec $(a_n) \in \ell^2$! Ici la continuité de $b \mapsto \sum a_n b_n$ n'était pas supposée a priori.

Exercice 10. *Application aux séries de Fourier* ([G] p. 399, [R] §5.11). On va montrer, par une méthode d'analyse fonctionnelle, l'existence de fonctions *continues* 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas à l'origine. [Pour une construction explicite (un peu pénible) d'une telle fonction, voir [G] p. 262, [ZQ] p.79.]
On note X l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$, et D_n le *noyau de Dirichlet*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} .$$

a. Montrer que les applications S_n définies par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt$$

sont des formes linéaires continues sur X.
b. Montrer que

$$\|S_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \|D_n\|_1$$

[on pourra approcher la fonction $f(t)=\mathrm{sgn}(D_n(t))$ par des fonctions continues].
c. En utilisant l'inégalité $|\sin(t/2)| \leq |t/2|$, montrer que $\|D_n\|_1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.
d. Conclure à l'aide du théorème de Banach-Steinhaus.

Exercice 11. ([G] p. 398) Soient E un espace *de Banach*, F et G deux espaces normés, et $f : E \times F \to G$ une application *bilinéaire séparément continue*, i.e. $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur E pour chaque $y \in F$ et $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur F pour chaque $x \in E$. Alors f est continue sur $E \times F$.
Pour cela on pourra considérer une suite (y_k) qui tend vers 0 dans F, appliquer le théorème de Banach-Steinhaus aux applications linéaires $f_k(x) = f(x, y_k)$, et en déduire que $f(x_k, y_k)$ tend vers 0 si x_k et y_k tendent vers 0.

Exercice 12. ([ZQ] p.195) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée de $\mathbb{C}$. À toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on associe la suite

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q .$$

Si la série $\sum_0^\infty |a_n|$ converge, il est classique (théorème de Mertens) que la convergence de $\sum_0^\infty b_n$ entraîne celle de $\sum_0^\infty c_n$. Montrer la réciproque : si la convergence de $\sum_0^\infty b_n$ entraîne celle de $\sum_0^\infty c_n$, alors nécessairement $\sum_0^\infty |a_n|$ converge.
Pour cela, on introduira l'espace de Banach E des suites convergentes de $\mathbb{C}$ (muni de $\|.\|_\infty$), et on appliquera le théorème de Banach-Steinhaus aux applications $u_n(B) = C_n$, où B est la suite des sommes partielles de la série $\sum b_n$, et $C_n = c_o + \cdots + c_n$.

Voir dans [P] p.118 une autre application de Banach-Steinhaus aux suites (procédé de sommation de Tœplitz).

Théorème 7 (théorème de l'application ouverte, ou des isomorphismes de Banach) *Soient X et Y deux espaces de* Banach, *et $u : X \to Y$ une application* linéaire continue, bijective *de X sur Y. Alors l'application réciproque u^{-1} est continue.*

La preuve est un peu plus longue que celle de Banach-Steinhaus. Voir [B] p.19, [G] p. 397, [L] p.191, ou [R] chap.5.

Contre-exemple. ([D] p. 89) Soient i l'injection canonique de $X = \ell^2$ dans ℓ^∞, et $Y = i(X)$ muni de la norme induite par ℓ^∞. Alors i est continue bijective de X sur Y, mais i^{-1} n'est pas continue : il n'existe aucune constante C telle que

$$\left(\sum_n |u_n|^2\right)^{1/2} \leq C \sup_n |u_n|$$

pour toute $(u_n) \in \ell^2$. Ici X est complet mais non Y.

Exercice 13. *Application aux séries de Fourier* ([R] §5.15). Montrer qu'il existe une suite tendant vers 0 qui n'est pas la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(0, 2\pi)$. Pour cela munir l'espace $X = L^1(0, 2\pi)$ de la norme L^1, et l'espace Y des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 lorsque $n \to \pm\infty$ de la norme $\|c\|_\infty = \sup_n |c_n|$. Appliquer le Théorème 7 à l'application $f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de X dans Y, et conclure en considérant $f = D_n$ (cf. Exercice 10.c).

Exercice 14. ([L] p. 192, [B] p. 22) Soient X un espace de Banach, Y et Z deux sous-espaces *fermés* supplémentaires dans X (i.e. $X = Y \oplus Z$). Alors l'application $Y \times Z \to X$ définie par $(y, z) \mapsto x = y + z$ est un isomorphisme d'espaces de Banach, autrement dit les projections de X sur Y et Z sont continues. On dit alors que Y et Z sont *supplémentaires topologiques.* [Appliquer le Théorème 7 à $(y, z) \mapsto y + z$, l'espace $Y \times Z$ étant muni de la norme $\|(y, z)\| = \|y\| + \|z\|$.]

Théorème 8 (théorème du graphe fermé) *Soient X et Y deux espaces de* Banach, *et $u : X \to Y$ une application* linéaire. *Alors u est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$, i.e.*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \ \textit{dans}\ X \\ u(x_n) \to y \ \textit{dans}\ Y \end{cases} \quad \textit{entraînent}\ y = 0 \ .$$

Le graphe de u est $\{(x, u(x)), x \in X\} \subset X \times Y$. Dire qu'il est fermé signifie que, si (x, y) est limite d'une suite $(x_n, u(x_n))$ dans $X \times Y$, alors $y = u(x)$. Par linéarité de u, il suffit d'avoir cette propriété pour $x = 0$. Il est clair que, si u est continue, son graphe est fermé.

Noter que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue, bien que son graphe soit fermé. Il est vrai qu'elle n'est guère linéaire...

Preuve du Théorème 8. ([B] p. 20) Soient $\|.\|_X$ et $\|.\|_Y$ les normes de X et Y. On peut aussi munir X de la "*norme du graphe*"

$$\|x\| = \|x\|_X + \|u(x)\|_Y \ .$$

Si le graphe est fermé, l'espace X est encore un Banach pour $\|.\|$. En effet, si (x_n) est une suite de Cauchy pour la nouvelle norme elle l'est pour l'ancienne, d'où $x_n \to x$ dans X (ancienne norme), et $(u(x_n))$ est de Cauchy dans Y, d'où $u(x_n) \to y$ dans Y. Alors $y = u(x)$ par l'hypothèse, et $x_n \to x$ au sens de la norme du graphe.

L'application $x \mapsto x$ de X muni de $\|.\|$ dans X muni de $\|.\|_X$ est bijective et continue. Par le Théorème 7 l'application inverse est continue ; il existe donc une constante M telle que

$$\|x\|_X \leq \|x\| = \|x\|_X + \|u(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \ ,$$

d'où la continuité de $u : X \to Y$ (pour les normes de départ).

Variante de la preuve : Notons G le graphe et p_X, p_Y les projections naturelles de $X \times Y$ sur X et Y. On peut alors voir u comme la composée

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & G & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & (x, u(x)) & \mapsto & u(x) \ . \end{array}$$

La deuxième application est la restriction $p_Y|G$ de p_Y au graphe ; elle est continue. D'autre part, $p_X|G$ est une bijection de G sur X, continue. Si G est fermé dans le Banach $X \times Y$, c'est lui-même un Banach. D'après le Théorème 7, l'application $(p_X|G)^{-1}$ est continue de X sur G, et $u = (p_Y|G) \circ (p_X|G)^{-1}$ est continue. ∎

4 Références

[B] BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1993 (chapitre 2)
[D] DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, tome 2, Gauthier-Villars 1974 (§12.16)
[G] GOURDON, *Analyse*, Ellipses 1994 (annexe A)
[GT] GONNORD et TOSEL, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses 1996
[L] LANG, *Analyse réelle*, InterEditions 1977 (chapitre VIII)
[MV] MOISAN et VERNOTTE, *Topologie et séries*, Ellipses 1991 (p. 10-12)
[N] NOURDIN, *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie*, Dunod 2001 (§1.2)
[P] POMMELLET, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994 (problèmes p. 50 et 118)
[R] RUDIN, *Real and complex analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill 1987 (chapitre 5)
[TM] TISSIER et MIALET, *Analyse à une variable réelle*, Bréal 2000 (p. 127 et 248)
[ZQ] ZUILY et QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson 1995 (chapitre VI, et p. 258-264).