UNIVERSITÉ DE NICE
INGO WASCHKIES
2013

L1 ALGÈBRE LINÉAIRE 2
SEMESTRE 2

Feuille 1.

1. Combinaisons linéaires
   On rappelle qu'on note $\mathrm{CL}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition d'une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Quand est-ce qu'on dit qu'une combinaison linéaire est triviale?

   (b) Soient $v_1 = (1, 2, -1)$ et $v_2 = (0, 1, 2)$. Donner cinq exemples de combinaison linéaires de v_1 et v_2. Trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.

   (c) Montrer que $\mathrm{CL}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$.

   (d) Soient $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 2, 3)$. Soient $u_1 = (1, 4, 4)$, $u_2 = (-2, 6, -1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$. Pour quel $i \in \{1, 2, 3\}$ est-ce qu'on a $u_i \in \mathrm{CL}(v_1, v_2)$?

   (e) Soient $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, -1)$. Montrer que $e_1, e_2 \in \mathrm{CL}(v_1, v_2)$, puis que $\mathrm{CL}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.

2. Systèmes linéaires homogènes

   (a) Résoudre les systèmes linéaires homogènes(en x, y, z) suivantes

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

   (b) Résoudre le système linéaire homogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} -2x + y - 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ -3x + 6y + 3z &= 0 \\ -3y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

   (c) Résoudre les systèmes linéaires homogènes (en x, y, z, w) suivantes

$$\begin{cases} y + w = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - z - w = 0 \\ 2x - y - z - w = 0 \\ x + y + y + w = 0 \end{cases}$$

   (d) Résoudre en fonction de λ le système linéaire homogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 2y + (\lambda - 1)z &= 0 \end{aligned}$$

3. Systèmes linéaires inhomogènes

   (a) Résoudre les systèmes linéaires inhomogènes (en x, y, z) suivante

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z = 5 \end{cases}$$

   (b) Résoudre en fonction de λ, μ le système linéaire inhomogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} \mu x + \lambda y + z &= \mu \\ x + \mu y &= \lambda + \mu \\ x + 2y - \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

4. Combinaisons linéaires II

   (a) Montrer que si $u, v \in \mathrm{CL}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $u + v \in \mathrm{CL}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ et $\lambda v \in \mathrm{CL}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
   (b) Montrer que $v \in \mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_n)$ ssi $\mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_n, v) = \mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_n)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{CL}(u_1, \ldots, u_n) \subset \mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_m)$ ssi $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_m)$.
   (d) Déduire l'assertion suivante: Étant donnée $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ on forme la matrice A de taille nxm dont les colonnes sont les v_i. On se permet de manipuler A en performant des opérations de Gauss sur les colonnes de A pour trivialiser un nombre maximal de colonnes. Soient $c_1, \ldots, c_k$ les colonnes non nulles restantes. Alors $\mathrm{CL}(v_1, \ldots, v_m) = \mathrm{CL}(c_1, \ldots, c_k)$.