Feuille 2.

1. Écritures et familles libres

   On considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 3, 0) \quad , \quad v_2 = (0, 1, 2, 3) \quad , \quad v_3 = (2, 3, 4, -3).$$

   (a) Calculer toutes les façons d'écrire $(0, 0, 0, 0)$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre?

   (b) Calculer toutes les façons d'écrire $(1, 3, 5, 3)$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

   (c) Montrer que $\mathrm{CL}(v_1, v_2) = \mathrm{CL}(v_1, v_2, v_3)$ et qu'on ne peut plus réduire la famille $\{v_1, v_2\}$ sans changer l'ensemble des combinaisons linéaires engendrés. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre?

   (d) Vérifier qu'il n'existe qu'une seule façon d'écrire $(1, 3, 5, 3)$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2.

2. Familles libres et bases

   (a) Soit $v_1, v_2, \dots v_m$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ Montrer que

$$\mathrm{CL}(v_1, \dots, v_m) = \mathrm{CL}(v_1, \dots, v_m, 0)$$

   (b) Soit $v_1, v_2, \dots v_m$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, soit $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$ une combinaison linéaire. Rappeler pourquoi on a pour tout i t.q. $\lambda_i \neq 0$

$$\mathrm{CL}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \mathrm{CL}(v_1, v_2, \dots, \cancel{v}_i, v, \dots, v_m)$$

   (c) En déduire les assertions suivantes:
   Étant donné $v_1, \dots, v_m \in \mathbf{R}^n$ on forme la matrice $A \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs v_i. On effectue des opérations de Gauss sur les colonnes. Alors à chaque étappe l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice est $\mathrm{CL}(v_1, \dots, v_m)$. Si on effectue l'algorithme de Gauss sur les colonnes de cette matrice jusqu'a ce qu'on ne peut plus annuler de colonnes, alors l'ensemble des colonnes non nulles de cette matrice est une base de $\mathrm{CL}(v_1, \dots, v_m)$.

   (d) Considérons la famille

$$F = \{(1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 1), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 2)\}$$

   Est-ce que F est libre? Donner une base de $V = CL(F)$ qui ne contient pas de vecteurs de F, i.e. trouver une famille libre $u_1, \dots, u_k \notin F$ telle que $\mathrm{CL}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{CL}(F)$.

(e) Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, Considérons la famille

$$G = \{(1,2,0,1), (\alpha,0,0,\beta), (\alpha,\alpha,-1,\alpha), (0,\beta,0,2)\}.$$

Calculer une base de $\mathrm{CL}(G)$ et donner $\dim(\mathrm{CL}(G))$.

3. Somme et intersection I

   Soient $v_1 = (1,-1,1,0), v_2 = (1,2,3,4), v_3 = (0,1,2,-1)$ et $w_1 = (1,1,1,1), w_2 = (1,2,1,-1), w_3 = (1,0,1,0)$. Notons $V = \mathrm{CL}(v_1, v_2, v_3)$ et $W = \mathrm{CL}(w_1, w_2, w_3)$.

   (a) Trouver une base de $V + W$, i.e. donner une famille libre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ telle que

   $$\mathrm{CL}(u_1, \ldots, u_k) = V + W.$$

   (b) Trouver un système linéaire L tels que $\mathrm{Sol}(L) = \mathrm{CL}(v_1, v_2, v_3)$ et un systèm linéaire $\mathrm{Sol}(\tilde{L}) = \mathrm{CL}(w_1, w_2, w_3)$.

   (c) Donner une base de $V \cap W$, i.e. donner une famille libre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ telle que

   $$\mathrm{CL}(u_1, \ldots, u_k) = V \cap W.$$

   (d) Vérifier la formule $\dim(V + W) = \dim W + \dim V - \dim(V \cap W)$.

4. Somme et intersection II

   Soient les systèmes linéaires L et $\tilde{L}$ suivants

   $$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - 2z + w = 0 \end{cases}$$

   On note $V = \mathrm{Sol}(L)$ et $W = \mathrm{Sol}(\tilde{L})$.

   (a) Trouver une base de $V \cap W$, i.e. donner une famille libre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ telle que

   $$\mathrm{CL}(u_1, \ldots, u_k) = V \cap W.$$

   (b) Résoudre L et $\tilde{L}$, puis donner une base de $V + W$, i.e. donner une famille libre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ telle que

   $$\mathrm{CL}(u_1, \ldots, u_k) = V + W.$$

   (c) Vérifier la formule $\dim(V + W) = \dim W + \dim V - \dim(V \cap W)$.