Université de Nice
Ingo Waschkies
2013

L1 Algèbre Linéaire 2
semestre 2

Feuille 3.

1. Matrice associée à une application linéaire
   Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z,w) = (x+2y+3z-w, -x+y-z+w)$.
   (a) Vérifier que f est linéaire et donner $M_C^C(f)$.
   (b) Montrer que $B_1 = \{(1,0,0,1),(1,2,0,1),(1,1,1,-1),(1,0,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis calculer $M_C^{B_1}(f)$,
   (c) Montrer que $B_2 = \{(1,2),(-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis calculer $M_{B_2}^C(f)$.
   (d) Calculer la matrice $M_{B_2}^{B_1}(f)$.

2. Matrice associée à une application linéaire II
   Soit le système linéaire L en (x,y,z,w) donnée par

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+w=0 \end{cases}$$

   Soit V l'espace des solutions de L.
   (a) Montrer que si $(x,y,z,w) \in V$ alors $(w,z,y,x) \in V$, puis que l'application $f : V \to V$ définie par $f(x,y,z,w) = (w,z,y,x)$ est linéaire.
   (b) Calculer une base B de V, puis donner $M_B^B(f)$.
   (c) Completer la base B en une base $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^4$. On notera encore f l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z,w) = (w,z,y,x)$. Donner $M_C^C(f)$ ainsi que $M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(f)$

3. Déterminer une application linéair à partir d'une matrice et deux bases
   Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Soient $B = \{(1,1,-1),(1,-2,0),(-1,1,-1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$
   (a) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_C^C(f) = A$.
   (b) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_C^B(f) = A$.
   (c) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_B^C(f) = A$.
   (d) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_B^B(f) = A$.

4. Matrice de changement de coordonnées I
   Soient $B = \{(1,1),(-1,2)\}$, $\tilde{B} = \{(-1,1),(1,3)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer les matrices $M_C^{\tilde{B}}, M_C^B$ et $M_{\tilde{B}}^C, M_B^C$.

(b) Calculer les matrices $M_B^{\tilde{B}}$ et $M_{\tilde{B}}^B$.

(c) Soit $v \in \mathbb{R}^2$ avec $[v]_B = (2,3)$. Donner v et $[v]_{\tilde{B}}$

(d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice est donnée par $M_{\tilde{B}}^B(f) = I$, expliciter la formule de f.

5. Matrice de changement de coordonnées II
Soient $B = \{(1,0,0,1), (-1,2,0,1), (1,0,1,-1), (1,0,2,0)\}$ et
$\tilde{B} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^4$.

(a) Calculer les matrices $M_C^{\tilde{B}}, M_C^B$ et $M_{\tilde{B}}^C, M_B^C$.

(b) Calculer les matrices $M_B^{\tilde{B}}$ et $M_{\tilde{B}}^B$.

(c) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice est donnée par

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner $M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(f)$. Expliciter la formule de f.