Université de Nice
Ingo Waschkies
2013

Feuille 4.

1. Le déterminant d'une matrice $2x2$ ou $3x3$

   (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes. En déduire quelles sont les matrices inversibles.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Trouver les valeurs réels λ, μ pour lesquelles les matrice suivante est inversible

   $$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \lambda \\ 3\lambda & 2\mu \end{pmatrix} \qquad B_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \mu+\lambda & \mu-\lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

   (c) Calculer le déterminant des matrices suivantes

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   (d) Calculer en fonction de α, β, γ le déterminant de la matrices suivante

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant d'une matrice $4x4$

   (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer à l'aide d'opérations de Gauss sur les lignes le déterminant de la matrice suivante

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. L'inverse d'une matrice $2x2$

   Prouver que si
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   est inversible alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Valeurs propres et vecteurs

   (a) Rappeler le théorème du rang.

   (b) Soit A une matrice réelle de taille nxn. Justifier pourquoi le système linéaire homogène associée à A admet une solution non-triviale ssi $\det(A) \neq 0$.

   (c) Pour chacune des matrices
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} \qquad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
   déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système linéaire homogène associée admet une solution non-triviale, puis calculer une telle solution. Justifier qu'une telle solution v vérifie $A_0 v = \lambda v$ (resp. $B_0 v = \lambda v$).

   (d) Soit
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   On pose $A = A_0$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le système linéaire homogène associée à A_λ admet un espace de solutions de dimension 2. Justifier (en appliquant le théorème du rang) qu'alors
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

   (e) Trouver une matrice
$$A = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$
   pour laquelle le système linéaire homogène associée à A_λ n'admet jamais de solution non-triviale quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une CNS pour qu'une telle situation se produise.