Université de Nice
Ingo Waschkies
2013

L1 Algèbre Linéaire 2
semestre 2

Feuille 5.

1. Étude de diagonalisabilité
   Décider si les matrices suivantes sont diagonalisables:

   (a)
$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$M_5 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$M_7 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisation de matrices
   Diagonaliser les matrices suivantes (c'est-à-dire trouver une base B dans laquelle l'endomorphisme associée à la matrice donnée soit diagonal).

   (a)
$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$M_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalisation et puissance
   Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Diagonaliser A.
   (b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Problème d'évolution linéaire
   On considère une boite étanche contenant un liquide. Cette boite est subdivisée en trois compartiments A, B, C. Les parois entre les compartiments sont d'une porosité variable. Ainsi on mésure d'après une journée:
   (a) la moitié du liquide contenu dans A y est restée, l'autre moitié est passée dans C
   (b) la moitié du liquide contenu dans B y est restée, l'autre moitié est passée dans A
   (c) la moitié du liquide contenu dans C y est restée, l'autre moitié est passée dans A
   (d) Notons (a, b, c) le vecteur des volumes de liquide contenus dans les compartiments A,B,C. Trouver une matrice M telle que $M(a, b, c)$ décrit le vecteur des volumes de liquide contenus dans les compartiments A,B,C un jour plus tard.
   (e) Si à un moment tout le liquide est dans le compartiment B quelle sera la repartition après 2 jours, après une semaine?
   (f) Il existe une repartition stable qui reste constante au cours du temps. Calculer cette repartition.
   (g) Que dire de la repartition après n semaine si n est tres grand.