Université de Nice
Ingo Waschkies
2013



# Feuille 7.

1. Orthogonalité

   (a) Soit $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ et notons $v^\perp$ le sous-espace orthogonal à CL($v$), c'est-'a-dire $v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0\}$. Trouver une base de $v^\perp$.

   (b) Soient $v = (1, 0, 1, -1)$ et $w = (0, 1, 1, 2)$. Trouver une base de $v^\perp \cap w^\perp$.

   (c) Soit la famille $B = \{(1, 1, -1), (1, -2, -1), (1, 0, 1)\}$. Montrer que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\tilde{B} = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\}$ est une base orthonormale de $\tilde{B}$. Calculer (à l'aide de produits scalaires) les coordonnées de $(1, 1, 1)$ dans $\tilde{B}$, puis dans $B$.

2. Algorithme de Gram-Schmidt

   (a) Soit la famille libre $B = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 0, 2, 3)\}$ et $V = \mathrm{CL}(B)$. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormale de $V$. Soit $v \in V$ le vecteur dont les coordonées sont $[v]_B = (1, -1, 1)$ trouver les coordonnées de $v$ dans cette nouvelle base.

   (b) Soit le vecteur $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Trouver $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\{v_1, v_2.v_3\}$ est une base orthonormale.

   (c) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ une base orthogonale. Quelle base produit l'algorithme de Gram-Schmidt?

   (d) Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ une base orthonormale. On considère la base $\tilde{B} = \{v_1, v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{k+1} + v_k\}$. Quelle base produit l'algorithme de Gram-Schmidt à partir de $\tilde{B}$?

3. Diagonalisation dans une base orthonormale
   Diagonaliser les matrices symétriques suivantes dans une base orthonormale (c'est-à-dire trouver une base orthonormale $B$ dans laquelle l'endomorphisme associée à la matrice donnée soit diagonal). Donner la signature de la matrice.

   (a)
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. Algorithme de Smith

Dans cet exercice on considère des formes bilinéaires symétriques dont les matrices dans la base canonique sont données. À l'aide de l'algorithme de Smith trouver pour chacune ces formes bilinéaires symétriques une base dans laquelle elle est diagonales. Préciser aussi leurs signatures.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & -1 & -1 \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$