UNIVERSITÉ DE NICE — L1 ALGÈBRE LINÉAIRE 2
INGO WASCHKIES — SEMESTRE 2
2013

Partiel.
Calculettes et documents interdits. Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse.

Exercice 1. *Soient* $B = \{(1,1),(1,2)\}$, $\tilde{B} = \{(-1,1),(1,-3)\}$ *deux familles de vecteurs de* $\mathbb{R}^2$.

1. *Montrer que* B *et* $\tilde{B}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calculer les matrices* $M_C^{\tilde{B}}, M_C^B$ *et* $M_{\tilde{B}}^C, M_B^C$.
3. *Calculer les matrices* $M_B^{\tilde{B}}$ *et* $M_{\tilde{B}}^B$.
4. *Soit* $v \in \mathbb{R}^2$ *avec* $[v]_B = (-2,3)$. *Donner* v *et* $[v]_{\tilde{B}}$
5. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *l'application linéaire telle que* $f(-1,1) = (0,-1)$ *et* $f(1,-3) = (\alpha - 2, \alpha - 4)$. *Donner* $M_{\tilde{B}}^B(f)$ *et expliciter la formule de* f.
6. *Donner une base de* $\ker(f)$ *et une base de* $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 2. *Soient* $v_1 = (1,-1,1), v_2 = (0,-1,2), w_\mu = (-1,\mu,0), w = (1,0,-1)$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *où* $\mu \in \mathbb{R}$. *On pose* $B = \{v_1, v_2\}$, $B_\mu = \{w_\mu, w\}$ *et* $V_\mu = \mathrm{CL}(w_\mu, w)$.

1. *Montrer que* B_μ *est une base de* V_μ.
2. *Trouver* μ_0 *tel que* B *est aussi une base de* V_{μ_0}. *Montrer qu'il n'existe qu'un seul tel* μ_0. *On posera* $V = V_{\mu_0}$ *et* $\tilde{B} = B_{\mu_0}$.
3. *Calculer les matrices* $M_B^{\tilde{B}}$ *et* $M_{\tilde{B}}^B$.
4. *Soit* $f : V \to V$ *l'application linéaire dont la matrice est donnée par*

$$M_{\tilde{B}}^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Donner une formule explicite pour f.
5. *Trouver un vecteur* $v \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\{v_1, v_2, v\}$ *et* $\{w_\mu, w, v\}$ *sont des bases de* $\mathbb{R}^3$. *Trouver toutes les applications linéaires* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *telles que* $g \circ g = 0$ *et pour tout* $x \in \mathrm{CL}(v_1, v_2)$ *on a* $g(x) \in V_\mu$.

Exercice 3. *(Bonus)*
Dans cette exercice on identifie un vecteur $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ *avec la matrice* $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. *Soit* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *On note*

$$f_B : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad ; \qquad f_B(X) = XB - BX \qquad \text{où} \qquad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* f_B *est linéaire.*
2. *Calculer* $M_C^C(f)$.
3. *Montrer que* $\mathrm{rg}(M_C^C(f)) \leqslant 2$. *(Indication: Si* c_1, c_2, c_3, c_4 *sont les colonnes de la matrice* $M_C^C(f)$ *considerer* $bc_2 + cc_3$.*)*
4. *Montrer que* $\mathrm{rg}(M_C^C(f)) = 2$ *sauf si* $B \in \mathrm{CL}(I)$, *et dans ce cas le rang est* 4.
5. *Montrer que* $I \in \ker(f_B)$ *et* $B \in \ker(f_B)$.
6. *En déduire que pour tout* $B \in M_2(\mathbb{R})$ *il existe des réels* λ, μ *tels que* $B^2 = \lambda I + \mu B$.