Université de Nice
Ingo Waschkies
2014

L1 Algèbre Linéaire 2
semestre 2

Feuille 1.

1. Combinaisons linéaires
On rappelle qu'on note $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition d'une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Quand est-ce qu'on dit qu'une combinaison linéaire est triviale?

   (b) Soient $v_1 = (-2, 1, -1)$ et $v_2 = (1, 0, 1)$. Donner trois exemples de combinaison linéaires de v_1 et v_2. Montrer que $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, 2)$ est une combinaison linéaire de v_1 et v_2. Trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de v_1 et v_2.

   (c) Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$.

   (d) Soient $v_1 = (2, 0, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 2)$. Soient $u_1 = (1, 4, 4)$, $u_2 = (-2, 6, -1)$, $u_3 = (0, 1, 3)$. Pour quel $i \in \{1, 2, 3\}$ est-ce qu'on a $u_i \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$?

   (e) Soient $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (2, 1)$. Montrer que $e_1, e_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, puis que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.

2. Systèmes linéaires homogènes
On rappelle que résoudre un système linéaire signifie qu'on doit écrire l'ensemble de toutes les solutions du système sous forme $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ où $v_1, v_2, \ldots, v_m$ doit être une famille libre. Si on effectue correctement l'algorithme de Gauss on trouvera automatiquement une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ qui convient.

   (a) Résoudre les systèmes linéaires homogènes(en x, y, z) suivantes

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

   (b) Résoudre les systèmes linéaires homogènes(en x, y, z) suivantes

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

   (c) Résoudre le système linéaire homogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} -2x + y - 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ -3x + 6y + 3z &= 0 \\ -3y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre (en fonction de λ) les systèmes linéaires homogènes (en x, y, z, w) suivantes

$$\begin{cases} 2\lambda y - z - w = 0 \\ 2x - y - z - w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda y + (1-\lambda) w = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ \lambda x + z = 0 \end{cases}$$

(e) Résoudre en fonction de λ le système linéaire homogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \\ x + 2y + (\lambda - 1) z &= 0 \end{aligned}$$

3. Systèmes linéaires inhomogènes

(a) Résoudre les systèmes linéaires inhomogènes (en x, y, z) suivante

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z = 5 \end{cases}$$

(b) Résoudre en fonction de λ, μ le système linéaire inhomogène (en x, y, z) suivante

$$\begin{aligned} \mu x + \lambda y + z &= \mu \\ x + \mu y &= \lambda + \mu \\ x + 2y - \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

(c) Soient $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 2, 1)$. Pour quel $\lambda \in \mathbb{R}$ est-ce qu'on a $(1, \lambda, 2) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Montrer qu'il existe toujours un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, \lambda, b) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Est-ce que cela est aussi vrai pour un vecteur de type (λ, a, b)?