UNIVERSITÉ DE NICE
INGO WASCHKIES
2014

Feuille 2.

1. Écritures
   On rappelle qu'une écriture d'un vecteur $v \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ est un vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que $v = \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$.
   Soient $v_1 = (1, 2, -3, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 5, -5, 3)$ et $F = \{v_1, v_2, v_3\}$.

   (a) Montrer que les écritures de $(0, 0, 0, 0)$ dans F forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on détermine une base.

   (b) Est-ce que F est libre?

   (c) Calculer toutes les écritures de $(-1, 1, 1, 1)$.

   (d) Donner une base de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

2. Coordonnées
   Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel et B une base de V. On rappelle que l'on désigne par $[v]_B$ le vecteur des coordonnées d'un vecteur $v \in V$ et que c'est par définition l'unique écriture de v dans B. Par convention ce vecteur est toujours considéré comme vecteur colonne.
   Soient $v_1 = (1, 2, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 3, 1)$ et $F = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   Soient $w_1 = (4, 0, 0, 3)$, $w_2 = (0, -4, 0, 1)$, $w_3 = (0, 0, 4, 1)$.

   (a) Montrer que la famille F est libre.

   (b) Montrer (simultanément) que $w_1, w_2, w_3 \in \mathrm{Vect}(F)$ et calculer (en même temps) leurs coordonnées dans F.

   (c) Montrer que $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et en déduire que $\mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Puis calculer les coordonnées de v_1, v_2, v_3 dans la base $B = \{w_1, w_2, w_3\}$.

   (d) Vérifier que les matrices $([v_1]_B\ [v_2]_B\ [v_3]_B)$ et $([w_1]_F\ [w_2]_F\ [w_3]_F)$ sont inverses l'une à l'autre.

   (e) Vérifier que si $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \in \mathrm{Vect}(F)$ alors

$$[v]_B = ([v_1]_B\ [v_2]_B\ [v_3]_B) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

3. Sous-espaces vectoriels et solutions de systèmes linéaires
   À l'aide de l'algorithme de Gauss on a vu que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n variables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (*i.e.* c'est $\text{Vect}(F)$ pour une certaine famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$). On se propose de voir comment tout sous-espace peut se réaliser comme l'ensemble des solutions d'un certain système.

   (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Réduire le système linéaire homogène(en x, y) suivante

   $$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y = b \\ x - 2y = c \end{cases}$$

   Préciser l'équation (E) sur a, b, c qui doit être vérifié pour qu'il y ait au moins une solution.

   (b) Déduire que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Sol}(E)$ où $v_1 = (1, 2, 1)$ et $v_2 = (2, -1, -2)$.

   (c) Soit une famille F de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Expliquer plus généralement comment on peut trouver un système linéaire homogène L telle que $\text{Vect}(F) = \text{Sol}(L)$. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le nombre d'équations que l'on obtient?

4. Somme et Intersection
   Soient $V, W \subset \mathbb{R}^n$ deux sous-espaces. On rappelle que

   $$V + W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \exists v \in V \ w \in W \text{ tel que } u = v + w\}$$

   $$V \cap W = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \in V \text{ et } u \in W\}$$

   Soient $v_1 = (1, -1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (0, 1, 2, -1)$ et $w_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 2, 1, -1)$, $w_3 = (1, 0, 1, 0)$. Notons $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $W = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$.

   (a) Montrer que $V + W = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3)$. En déduire que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et calculer une base de $V + W$.

   (b) Trouver des systèmes linéaires homogène (L) et $(\tilde{L})$ telles que $\text{Sol}(L) = V$ et $\text{Sol}(\tilde{L}) = W$.

   (c) Notons $L \cup \tilde{L}$ le système linéaire consistant en toutes les équations de L et celles de $\tilde{L}$. Montrer que $\text{Sol}(L \cup \tilde{L}) = V \cap W$. En déduire que $V \cap W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, puis calculer une base de cette espace.

   (d) Vérifier la formule $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$.