Université de Nice
Ingo Waschkies
2014

L1 Algèbre Linéaire 2
semestre 2

Feuille 3.

1. Matrice associée à une application linéaire
   Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z,w) = (x+2y+3z-w, -x+y-z+w)$.
   (a) Vérifier que f est linéaire et donner $M_C^C(f)$.
   (b) Montrer que $B_1 = \{(1,0,0,1), (1,2,0,1), (1,1,1,-1), (1,0,2,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, puis calculer $M_C^{B_1}(f)$,
   (c) Montrer que $B_2 = \{(1,2), (-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis calculer $M_{B_2}^C(f)$.
   (d) Calculer la matrice $M_{B_2}^{B_1}(f)$.

2. Matrice associée à une application linéaire II
   Soit l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x,y,z,w) = (-x+z-w, -x+y-z-w, 2x-y+2w).$$
   (a) Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} -x+z-w=0 \\ -x+y-z-w=0 \\ 2x-y+2w=0 \end{cases}$$
   et en déduire une base $\{v_1, v_2\}$ de l'espace des solutions de ce système.
   (b) Compléter $\{v_1, v_2\}$ en une base $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (c) Montrer que $\{f(v_3), f(v_4)\}$ est une famille libre et completer cette famille en une base $B_2 = \{f(v_3), f(v_4), w\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   (d) Déduire $M_{B_2}^{B_1}(f)$.
   (e) Expliquer plus généralement pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ comment on peut trouver des bases B_1, B_2 telles que les colonnes de la matrice $M_{B_2}^{B_1}(f)$ sont nulles ou des vecteurs de la base canonique.

3. Déterminer une application linéair à partir d'une matrice et deux bases
   Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   On admet que $B_1 = \{(1,2), (-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $B_2 = \{(1,0,-1), (1,-1,0), (-1,1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On se propose de déterminer explicitement la formule de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $M_{B_2}^{B_1}(f) = A$.
   (a) Soit $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donner $[v]_{B_1}$.

(b) Donner $[f(v)]_{B_2}$, puis la formule explicite pour $f(x,y)$.

4. Déterminer une application linéair à partir d'une matrice et deux bases II
Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Soit $B = \{(1,1,-1),(1,-2,0),(-1,1,-1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

   (a) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_C^C(f) = A$.

   (b) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_C^B(f) = A$.

   (c) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_B^C(f) = A$.

   (d) Donner la formule $f(x,y,z)$ de l'application linéaire f vérifiant $M_B^B(f) = A$.

5. Matrice associée à une application linéaire III
Soit le système linéaire L en (x,y,z,w) donnée par
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -y + z + 2w = 0 \end{cases}$$
Soit V l'espace des solutions de L.

   (a) Montrer que si $(x,y,z,w) \in V$ alors $(w,z,y,x) \in V$, puis que l'application $f : V \to V$ définie par $f(x,y,z,w) = (w,z,y,x)$ est linéaire.

   (b) Calculer une base B de V, puis donner $M_B^B(f)$.

   (c) Completer la base B en une base $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^4$. On notera encore f l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x,y,z,w) = (w,z,y,x)$. Donner $M_C^C(f)$ ainsi que $M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(f)$

6. Changement de coordonnées
Soient $B = \{(1,1),(-1,2)\}$, $\tilde{B} = \{(-1,1),(1,3)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calculer les matrices $M_C^{\tilde{B}}, M_C^B$ et $M_{\tilde{B}}^C, M_B^C$.

   (b) Calculer les matrices $M_B^{\tilde{B}}$ et $M_{\tilde{B}}^B$.

   (c) Soit $v \in \mathbb{R}^2$ avec $[v]_B = (2,3)$. Donner v et $[v]_{\tilde{B}}$

   (d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice est donnée par $M_{\tilde{B}}^B(f) = I$, expliciter la formule de f.