Université de Nice
Ingo Waschkies
2014

L1 Algèbre Linéaire 2
semestre 2

Feuille 4.

1. Noyau et image
   Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   On rappelle qu'on note f_A l'application linéaire qui vérifie $M_C^C(f_A) = A$. On notera aussi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A)$
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et une de $\mathrm{Im}(A)$.
   (b) Soit les bases $B_1 = \{(1,1,0,1),(1,0,-1,0),(0,1,1,0),(1,-2,-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $B_2 = \{(1,1,0),(1,1,1),(-1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une de $\mathrm{Im}(f)$ dans les cas où $M_{B_2}^C(f) = A$ (resp. $M_C^{B_1}(f) = A$, resp. $M_{B_2}^{B_1}(f) = A$)

2. Construction
   Soit la famille $F = \{(1,2,1,0),(1,-1,-1,1)\}$.
   (a) Montrer que F est libre et compléter F en une base B de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ qui vérifient $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Est-ce qu'on peut avoir $\mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Ker}(f)$?
   (c) Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ qui vérifient $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Quand est-ce qu'on a $\mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Ker}(f)$?
   (d) Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ qui vérifient $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $(1,2) \in \mathrm{Im}(f)$ (regarder d'abord le cas $\mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Ker}(f)$).
   (e) Trouver toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ qui vérifient $\mathrm{Vect}(F) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $(1,2,1) \in \mathrm{Im}(f)$.

3. Valeurs propres
   Soit les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Rappeler le théorème du rang.
   (b) Calculer le rang de $A-\lambda I$ et de $B-\lambda I$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, en déduire les dimensions de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ et de $\mathrm{Ker}(B-\lambda I)$.
   (c) Calculer une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ et de $\mathrm{Ker}(B-\lambda I)$.

4. Valeurs propres II
   Soit une matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Donner une condition nécessaitre et suffisante sur $\det(A - \lambda I)$ pour que le rang de $A - \lambda I$ ne soit pas 2.

(b) En déduire qu'il n 'y a au plus deux λ tels que le rang de $A - \lambda I$ ne soit pas 2. Puis chercher une conditions nècessaire et suffisante sur (a,b,c,d) pour qu'il y ait exactement $0, 1, 2$ λ tels que le rang de $A - \lambda I$ ne soit pas 2.

(c) Dans le cas qu'il y a deux valeurs distinctes λ et μ telles que le rang de $A - \lambda I$ et de $A - \mu I$ et ne soit pas 2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \cap \mathrm{Ker}(A - \mu I) = \{0\}$, en déduire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_A soit diagonale.

(d) S'il existe un un seul λ tels que le rang de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est de dimension 2. Déduire la forme de A.