

Partiel.

Calculatrices et documents interdits. Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse.

Exercice 1. Soient $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $\tilde{B} = \{(-1, 1), (1, -3)\}$ deux familles de vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que B et \tilde{B} sont des bases de \mathbb{R}^2 .
2. Calculer les matrices $M_C^{\tilde{B}}, M_C^B$ et $M_{\tilde{B}}^C, M_B^C$.
3. Calculer les matrices $M_B^{\tilde{B}}$ et $M_{\tilde{B}}^B$.
4. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ avec $[v]_B = (-2, 3)$. Donner v et $[v]_{\tilde{B}}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f(-1, 1) = (0, -1)$ et $f(1, -3) = (\alpha - 2, \alpha - 4)$. Donner $M_B^B(f)$ et expliciter la formule de f .
6. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{im}(f)$.

Exercice 2. Soient $v_1 = (1, -1, 1), v_2 = (0, -1, 2), w_\mu = (-1, \mu, 0), w = (1, 0, -1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 où $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $B = \{v_1, v_2\}$, $B_\mu = \{w_\mu, w\}$ et $V_\mu = \text{CL}(w_\mu, w)$.

1. Montrer que B_μ est une base de V_μ .
2. Trouver μ_0 tel que B est aussi une base de V_{μ_0} . Montrer qu'il n'existe qu'un seul tel μ_0 . On posera $V = V_{\mu_0}$ et $\tilde{B} = B_{\mu_0}$.
3. Calculer les matrices $M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}$ et $M_{\tilde{B}}^B$.
4. Soit $f : V \rightarrow V$ l'application linéaire dont la matrice est donnée par

$$M_{\tilde{B}}^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner une formule explicite pour f .

5. Trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{v_1, v_2, v\}$ et $\{w_\mu, w, v\}$ sont des bases de \mathbb{R}^3 . Trouver toutes les applications linéaires $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que $g \circ g = 0$ et pour tout $x \in \text{CL}(v_1, v_2)$ on a $g(x) \in V_\mu$.

Exercice 3. (Bonus)

Dans cette exercice on identifie un vecteur $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ avec la matrice

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note

$$f_B : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad ; \quad f_B(X) = XB - BX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f_B est linéaire.
2. Calculer $M_C^C(f)$.
3. Montrer que $\text{rg}(M_C^C(f)) \leq 2$. (Indication: Si c_1, c_2, c_3, c_4 sont les colonnes de la matrice $M_C^C(f)$ considérer $bc_2 + cc_3$.)
4. Montrer que $\text{rg}(M_C^C(f)) = 2$ sauf si $B \in \text{CL}(I)$, et dans ce cas le rang est 4.
5. Montrer que $I \in \ker(f_B)$ et $B \in \ker(f_B)$.
6. En déduire que pour tout $B \in M_2(\mathbb{R})$ il existe des réels λ, μ tels que $B^2 = \lambda I + \mu B$.