Persistance et Bifurcation de Tores Invariants

A. CHENCINER & G. IOOSS

Présenté par D. D. JOSEPH

Cet article est un appendice à «Bifurcations de tores invariants» (Arch. Rational Mech. Anal. **69**, 109–198) qui sera noté B.T.I. Il en reprend les notations et la bibliographie. Les références t.q.III-2.4, V-2.2., *etc* ... sont des références à B.T.I.

Nous montrons ici que dans certains cas l'existence du tore T_0 de dimension $n+1$ invariant par l'équation différentielle E_0 suffit à assurer l'existence d'un tore T_μ, de dimension $n+1$, proche de T_0 et invariant par l'équation différentielle E_μ (les notations sont celles de l'introduction de B.T.I.). Ceci s'applique en particulier à la situation considérée dans les théorèmes de bifurcation des chapitres III, IV, V de B.T.I.

Comme dans B.T.I., nous nous ramenons à l'étude d'une famille d'applications C^k, k assez grand; les notations sont celles du chapitre III de B.T.I. avec la différence que $\Phi(\theta, 0, \mu)$ n'est pas supposé égal à 0 pour $\mu \neq 0$: plus précisément, on considère une application

$$\bar{F}_\mu: T^n \times \mathscr{V} \to T^n \times E,$$

$\mathscr{V}$ voisinage de 0 dans E, définie par

$$F_\mu(\theta, x) = \big(f(\theta, x, \mu), \Phi(\theta, x, \mu)\big). \tag{1}$$

On suppose que $\bar{F}_0(T^n \times 0) = T^n \times 0$, c'est-à-dire

$$\Phi(\theta, 0, 0) = 0. \tag{2}$$

On note $A_\mu(\theta) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(\theta, 0, \mu)$ et $b(\theta) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \mu}(\theta, 0, 0)$.

Théorème A1. *On suppose que le difféomorphisme $\bar{g}$ de T^n défini par $g(\theta) = f(\theta, 0, 0)$ est C^k-conjugué à la rotation ergodique $\bar{R}_{\omega_0}$, et que le k-spectrographe de $\bar{F}_0$ vérifie les hypothèses de III.1. (existence d'une valeur propre «simple» $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0}$ telle que $(2\Omega_0 + \mathbb{Z}^n \cdot \omega_0) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, le complémentaire du cercle unité dans le* *spectrographe étant inclus dans un disque de rayon plus petit que* 1). *On suppose de plus que*

$$\exists \varepsilon>0,\ C>0, \quad \text{tels que } \forall q\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}, \quad \forall p\in\mathbb{Z},$$

$$|\Omega_0+q\,\omega_0-p|>\frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}}. \tag{3}$$

En général (non nullité d'un coefficient analogue au Re λ_1 *des lemmes III-2.4. et V-2.2.), il existe, pour μ proche de 0, un tore de dimension n proche de $T^n\times 0$ invariant par $\bar{F}_\mu$ et dépendant continuement de μ. La stabilité de ce tore est déterminée comme dans la proposition* V-2.1.

Démonstration

1) *Réduction à la dimension 2.* On procède comme en III-1 avec les modifications suivantes: l'application G: $\mathbb{R}^n\times E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times E\times\mathbb{R}$ s'écrit maintenant

$$G(\theta,x,\mu)=\big(g(\theta),A_0(\theta)\,x+b(\theta)\,\mu,\mu\big), \tag{4}$$

où on peut supposer que $g(\theta)=\theta+\omega_0$.

Le théorème de variété centrale II-1.7. ne s'applique pas directement comme en III-1 car la matrice $A_2(\theta)$ du théorème dépend *a priori* de θ: elle est en effet de la forme

$$\begin{pmatrix} R_{\Omega_0} & \tilde{b}(\theta)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{5}$$

où $\tilde{b}(\theta)=0$ dès que $b(\theta)=0$. On remédie à ceci par une translation de la forme

$$x'=x+\mu\,y(\theta). \tag{6}$$

Si y est solution de l'équation

$$y(\theta+\omega_0)-A_0(\theta)\,y(\theta)+b(\theta)=0,$$

la nouvelle application F_μ vérifie $b(\theta)\equiv 0$. L'existence d'un tel y de classe $C^{k-n-1-\varepsilon'}$, $\varepsilon'>\varepsilon$, est assurée par la condition diophantienne (3), après décomposition de (7) sur les fibres $E_1(\theta+\omega_0)$ et $E_2(\theta+\omega_0)$ des sous-fibrés invariants par $\bar{G}_0$.

On est ainsi ramené à une application dans $T^n\times\mathbb{R}^2$.

2) Identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, il nous reste à étudier une application $\bar{F}_\mu$: $T^n\times\mathscr{V}\to T^n\times\mathbb{C}$ ($\mathscr{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$). Des changements de variables analogues au précédent et ne demandant pas d'autre hypothèse diophantienne que (3), permettent de se ramener au cas où $\Phi(\theta,0,\mu)$ est d'ordre en μ aussi grand qu'on veut, pourvu que Φ soit suffisamment dérivable. On peut donc supposer que $\bar{F}_\mu$ est

défini par

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad & F_\mu(\theta,z)=\big(f(\theta,z,\mu),\ \Phi(\theta,z,\mu)\big),\\
& f(\theta,z,\mu)=\theta+\omega_0+\mu f_1(\theta)+O(1)\,z+O(1)\,\bar z+O(|\mu|^2+|z|^2),\\
& \Phi(\theta,z,\mu)=\lambda_0\big[z\big(1+\mu\,\lambda_1(\theta)\big)+\mu\,\lambda_2(\theta)\,\bar z\big]+O(|\mu|^r+|\mu|^2\,|z|+|z|^2).
\end{aligned}
$$

Le changement de variables de la démonstration de V-2.2. (voir aussi la remarque V-2.5.) nous ramène sans autre hypothèse diophantienne à la forme

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
& f(\theta,z,\mu)=\theta+\omega_0+\mu f_1(\theta)+O(1)\,z+O(1)\,\bar z+O(|z|^2+|\mu|^2),\\
& \Phi(\theta,z,\mu)=\lambda_0(1+\mu\,\lambda_1)\,z+o(|\mu|)\,z+o(|\mu|)\,\bar z+O(|\mu|^r+|z|^2).
\end{aligned}
$$

De même, si $\beta(\theta,\eta)$ est solution de l'équation

$$
(9)\qquad f_1(\theta)+\beta(\theta+\omega_0,\eta)-(1+\eta)\,\beta(\theta,\eta)=\omega_1\Big(\equiv\int_{T^1} f_1(\theta)\,d\theta\Big),
$$

le changement de variables

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
& \theta'=\theta+\mu\,\beta(\theta,|\mu|^{\frac{1}{2}}),\\
& z'=z
\end{aligned}
$$

met F_μ sous la forme (après suppression des accents):

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
& f(\theta,z,\mu)=\theta+\omega_0+\mu\,\omega_1+O(1)\,z+O(1)\,\bar z+O(|z|^2)+o(|\mu|),\\
& \Phi(\theta,z,\mu)=\lambda_0(1+\mu\,\lambda_1)\,z+o(|\mu|)\,z+o(|\mu|)\,\bar z+O(|\mu|^r+|z|^2).
\end{aligned}
$$

Posons enfin $z=\mu^{r-2}z'$, $|z'|\leqq 1$. Si $r\geqq 4$, F_μ devient (après suppression des accents)

$$
(12)\qquad F_\mu(\theta,z)=\big(\Theta(\theta,z,\mu),Z(\theta,z,\mu)\big)
$$

avec

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
& \Theta(\theta,z,\mu)=\theta+\omega_0+\mu\,\omega_1+\Theta_1(\theta,z,\mu),\\
& Z(\theta,z,\mu)=\lambda_0(1+\mu\,\lambda_1)\,z+Z_1(\theta,z,\mu)
\end{aligned}
$$

où Θ_1 et Z_1 sont des $o(|\mu|)$. La méthode habituelle de point fixe s'applique alors (séparément pour $\mu>0$ et $\mu<0$) pour prouver l'existence et la stabilité d'un tore perturbé invariant par $\bar F_\mu$, graphe d'une application $T^n\to\mathbb{C}$.

Théorème A2. *On suppose que le difféomorphisme $\bar g$ de T^n défini par $g(\theta)=f(\theta,0,0)$ est C^k-conjugué à la rotation ergodique $\bar R_{\omega_0}$, et que le k-spectrographe de $\bar F_0$ contient une valeur propre $\lambda_0=e^{2i\pi\Omega_0}$ qui vérifie*

$$
(14)\qquad \exists q_0\in\mathbb{Z}^n,\ k\in\mathbb{Z},\quad \textit{tels que}\ \ 2\Omega_0=q_0\cdot\omega_0+k.
$$

On suppose que le complémentaire du cercle unité dans le spectrographe est inclus dans un disque de rayon plus petit que 1 et que le fibré ξ_2 invariant associé au cercle unité du spectrographe a pour fibre $\mathbb{R}$ (pas forcément trivial). On suppose de *plus que*

(15)
$$\exists \varepsilon>0,\ C>0, \quad \textit{tels que } \forall q\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\},\ \forall p\in\mathbb{Z},$$
$$|q\cdot\omega_0-p|>\frac{C}{|q|^{n+\varepsilon}}.$$

Alors, dans les cas où $q_0\in 2\mathbb{Z}^n$ *et* $k\notin 2\mathbb{Z}$ *ou* $q_0\in\mathbb{Z}^n\backslash 2\mathbb{Z}^n$, *il existe en général* (*non nullité d'un coefficient analogue au* λ_1 *du* IV-2.1.), *pour* μ *proche de* 0, *un tore de dimension n proche de* $T^n\times 0$, *invariant par* $\bar{F}_\mu$ *et dépendant continuement de* μ. *Dans les cas où* $q_0\in 2\mathbb{Z}^n$ *et* $k\in 2\mathbb{Z}$, *on ne garantit la persistance de ce tore que si*

(16)
$$\int_{T^n} b^{(2)}(\theta)\,dv(\theta)=0 \qquad (v \textit{ comme au } \text{II-2.8.}),$$

et si de plus une inégalité stricte est réalisée (*voir* (23)) *où* $b^{(2)}$ *est la projection de b sur le sous-espace des sections du fibré invariant* ξ_2 (*isomorphe à* $T^1\times\mathbb{R}$). *Dans tous les cas, la stabilité de ce tore est déterminée comme en* IV-2.1.

Remarque. Les conditions (16) et (23) sont naturelles: on sait bien que l'existence d'une orbite périodique pour un système différentiel autonome n'implique pas la persistance d'orbites périodiques pour des systèmes voisins si l'application de Poincaré a 1 pour valeur propre (des conditions analogues à (16), (23) assureraient une telle persistance).

Démonstration. On procède comme en IV-1 pour réduire l'application à la dimension 1, en s'inspirant du 1) de la démonstration du théorème A.1. pour les modifications à apporter. On suppose ici encore que l'on s'est ramené à $g(\theta)=\theta+\omega_0$ et l'on effectue une translation de la forme (6). On doit pour cela résoudre par rapport à y l'équation

(17)
$$y(\theta+\omega_0)-A_0(\theta)\,y(\theta)+b(\theta)=0.$$

La projection de cette équation sur le sous-fibré invariant ξ_1 fournit aisément la composante $y^{(1)}(\theta)$ sur $E_1(\theta)$ (notations du III-1.1.), car $A_0(\theta)$ contracte ces fibres.

En revanche, pour la résolution de la composante sur le sous-fibré invariant ξ_2, on doit distinguer les différents cas.

1) *Réduction à la dimension* 1, *si* $q_0\in 2\mathbb{Z}^n$. Dans ce cas ξ_2 est trivial et isomorphe à $T^1\times\mathbb{R}$. Un système de coordonnées adéquat conduit à une équation de la forme

(18)
$$y^{(2)}(\theta+\omega_0)-\lambda_0\,y^{(2)}(\theta)+b^{(2)}(\theta)=0 \qquad (\text{dans } \mathbb{R}),$$

où $\lambda_0=(-1)^k$. Il est clair que pour k impair, l'équation (18) admet une solution, avec perte de différentiabilité comme au théorème A.1.

Si k est pair, l'équation (18) n'a de solution $y^{(2)}$ que si

$$\int_{T^n} b^{(2)}(\theta)\,d\theta=0.$$

C'est la condition (16) où la mesure invariante v est ici remplacée par la mesure de Lebesgue puisqu'on a $g(\theta)=\theta+\omega_0$.

Après la translation (6), la nouvelle application F_μ n'a plus de terme de la forme $\mu b(\theta)$; on peut alors comme au théorème A1. appliquer le théorème de variété centrale II-1.7. (Voir aussi IV-2.)

2) *Fin de la démonstration si* $q_0 \in 2\mathbb{Z}^n$. On s'est ramené à une application $\bar{F}_\mu$: $T^n \times \mathscr{V} \to T^n \times \mathbb{R}$ ($\mathscr{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$), définie par

$$\begin{aligned} &F_\mu(\theta, x) = (f(\theta, x, \mu), \Phi(\theta, x, \mu)), \\ (19)\quad &f(\theta, x, \mu) = \theta + \omega_0 + \mu f_1(\theta) + x f_2(\theta) + O(|\mu| + |x|)^2, \\ &\Phi(\theta, x, \mu) = (-1)^k [1 + \mu a_1(\theta)] x + \mu^2 b_2(\theta) + c(\theta) x^2 + O(|\mu| + |x|)^3. \end{aligned}$$

Dans le cas k impair, la démonstration du théorème A.1 s'applique de façon identique. En revanche, dans le cas où k est pair, l'élimination du terme $\mu^2 b_2(\theta)$ se fait en rendant d'abord constants les coefficients $a_1(\theta)$, $b_2(\theta)$, $c(\theta)$ par des changements de variables «usuels» avec perte de différentiabilité; on arrive ainsi à

$$\Phi(\theta, x, \mu) = (1 + \mu a_1) x + \mu^2 b_2 + c x^2 + O(|\mu| + |x|)^3. \tag{20}$$

On opère ensuite une translation de la forme

$$x' = x + \mu \eta \tag{21}$$

où

$$c \eta^2 - a_1 \eta + b_2 = 0. \tag{22}$$

L'équation (22) n'a de solution η réelle que si

$$\Delta = a_1^2 - 4 b_2 c \geqq 0, \tag{23}$$

auquel cas la nouvelle application $\bar{F} = (f, \Phi)$ vérifie

$$\Phi(\theta, x, \mu) = (1 + \mu \lambda_1) x + c x^2 + O(|\mu| + |x|)^3, \tag{24}$$

où $\lambda_1 = \sqrt{\Delta}$ (on le choisit $\geqq 0$). Si on suppose l'inégalité (23) stricte, il est facile de voir qu'on peut éliminer, sans condition supplémentaire, un nombre fini des termes $\mu^p b_p(\theta)$ dans Φ. La fin de la démonstration du théorème A.1 s'applique alors de façon identique.

3) *Démonstration dans le cas où* $q_0 \in \mathbb{Z}^n \setminus 2\mathbb{Z}^n$. Dans ce cas le fibré ξ_2 n'est pas trivial. On utilise les notations du IV-2.4., en particulier $\bar{\bar{T}}^n = \mathbb{R}^n / 2\mathbb{Z}^n$: on peut choisir le relèvement $\bar{\bar{F}}_\mu$ de $\bar{F}_\mu$ à $\bar{\bar{T}}^n \times E$ de façon que -1 soit valeur propre dans le spectrographe de $\bar{\bar{F}}_0$. En effet, le remplacement de $f(\theta, x, \mu)$ par $f(\theta, x, \mu) + p$ où $p \in \mathbb{Z}^n$, transforme la valeur propre $\lambda_0 = e^{2i\pi\Omega_0 + i\pi n \cdot \omega_0}$ du spectrographe de $\bar{\bar{F}}_0$ en $\lambda_0 e^{i\pi n \cdot p}$. Dans le cas considéré on peut choisir n et p dans $\mathbb{Z}^n$ tels que -1 soit valeur propre.

La persistance, pour $\mu \neq 0$, d'un tore de dimension n proche de $\bar{\bar{T}}^n \times 0$ invariant par $\bar{\bar{F}}_\mu$, se démontre alors comme en 1) et 2): on obtient ce tore comme le graphe de $\bar{u}$: $\bar{\bar{T}}^n \to E$ défini par

$$u(\theta,\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k u_k(\theta) + \mu^r u_r(\theta,\mu), \qquad r \geqq 4, \tag{25}$$

où u est $2\mathbb{Z}^n$-périodique en θ, et $|u_r| = o(1)$.

L'unicité de la solution de (17) dans $C^l(\bar{\bar{T}}^n; E)$ et la $\mathbb{Z}^n$-périodicité des coefficients impliquent la $\mathbb{Z}^n$-périodicité des u_k, $k=1,\ldots,r$. Soit maintenant $\tilde{u}$: $\bar{\bar{T}}^n \to E$ défini par

$$\tilde{u}(\theta,\mu) = u(\theta+p,\mu), \qquad p \in \mathbb{Z}^n. \tag{26}$$

De ce qui précède, on déduit que

$$|\tilde{u}(\theta,\mu) - u(\theta,\mu)| = o(\mu^r).$$

De plus $\tilde{u}$ est solution de la même équation fonctionnelle que u:

$$\Phi(\theta, u(\theta,\mu), \mu) = u(f[\theta, u(\theta,\mu), \mu], \mu).$$

Pour montrer que u est $\mathbb{Z}^n$-périodique (*i.e.* identique à $\tilde{u}$), il reste à remarquer que le domaine d'attractivité (ou répulsivité) du tore défini par u est $O(\mu^r)$ et contient donc le tore défini par $\tilde{u}$.

Remarque importante sur la régularité; généralisation du théorème principal de B.T.I. Les tores obtenus aux théorèmes A.1, A.2 n'ont *a priori* qu'une dépendance continue en μ au voisinage de $\mu=0$ (vérification analogue à celle faite dans [12]). Ceci n'est pas gênant pour les démonstrations des théorèmes de bifurcation des chapitres III, IV, V de B.T.I. qui peuvent se faire sans changement lorsqu'on ajoute à $\Phi(\theta,x,\mu)$ un terme $(|\mu|^r)$; en particulier, dans le théorème V-3.1. de B.T.I., on n'a plus besoin de supposer que $\bar{F}_\mu(T^n\times 0) \subset T^n \times 0$ pour $\mu \neq 0$. Pour un énoncé complet du théorème ainsi obtenu, voir l'exposé de A. CHENCINER au C.I.M.E. de Bressanone (juin 1978) ou le chapitre VI du cours de G. IOOSS à Minneapolis (1978).

Ce travail a été fait lors d'un séjour des auteurs au département de Mathématiques de l'Université de Californie, Berkeley, en juillet 1978.

Institut de Mathématiques et
Science Physiques
Université de Nice

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1978)