

- premiers inférieurs à une limite donnée », *Mem. Couronnés de l'Acad. Roy. Sci. Bruxelles* **59** (1899).
- [55] C.-J. D. LA VALLÉE POUSSIN – « Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, 1 », *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), p. 183–256.
- [56] O. VELÁSQUEZ CASTAÑÓN – « Majoration du nombre de zéros d'une fonction méromorphe en dehors d'une droite verticale et applications », *J. Analyse Math.* **110** (2010), p. 67–127.
- [57] I. M. VINOGRADOV – « Une nouvelle estimation de la fonction $\zeta(1+it)$ », *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **22** (1958), p. 161–164 (en russe).
- [58] A. WEIL – *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Sci. Ind., no. 1041 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7** (1945), Hermann et Cie., Paris, 1948.
- [59] _____, « Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers », *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* (1952), n°. Tome Supplémentaire, p. 252–265.

Les travaux de looss et Plotnikov sur les vagues tri-dimensionnelles

Thomas Alazard¹

1. Introduction

Considérons un océan de profondeur infinie au repos. Pour visualiser ceci, assimilons le domaine spatial à l'espace \mathbf{R}^3 , que l'on suppose décomposé en deux parties distinctes : le demi-espace inférieur occupé par l'eau,

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : y < 0 \},$$

et le demi-espace supérieur occupé par l'air,

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : y > 0 \}.$$

Dans toute la suite on notera $x = (x_1, x_2)$ la variable horizontale et y la variable verticale. La gravité est orientée suivant l'axe (Oy) .

Imaginons que le vent souffle au dessus de cet océan. Sous certaines conditions, ce vent va générer des vagues, appelées vagues de vent. On observe qu'elles peuvent se propager sur des distances immenses, jusqu'à atteindre le rivage. Nous allons nous intéresser à la propagation de ces vagues loin de la zone de vent et loin du rivage. On parle alors de houle ou encore d'ondes de gravité, car les vagues doivent être vues comme des ondes qui se propagent sous l'action de la gravité. Quant à la forme des vagues, il faut imaginer une surface lisse tracée au dessus du plan horizontal d'équation $y = 0$.

Pour décrire une vague, nous avons besoin d'introduire plusieurs quantités dont bien sûr une fonction, notée Σ , pour mesurer l'élévation de la mer par rapport à son niveau au repos. L'inconnue Σ dépend du temps t et de la variable $x \in \mathbf{R}^2$. Le graphe de la fonction Σ est ce que l'on appelle la surface libre. Le domaine occupé par l'eau à l'instant t est le demi-espace situé sous la surface libre :

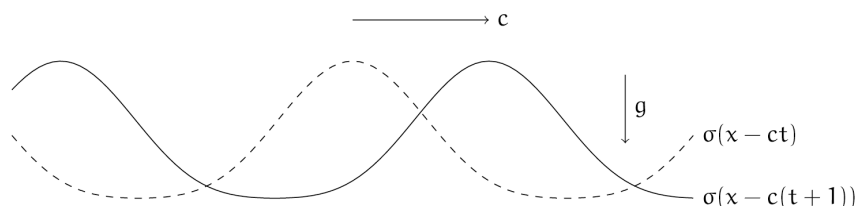
$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : y < \Sigma(t, x) \}.$$

¹ CNRS & Département de Mathématiques d'Orsay.

On va s'intéresser aux ondes périodiques permanentes. C'est un problème très ancien qui consiste à chercher des ondes se propageant sans altération de forme, telles que

$$\Sigma(t, x) = \sigma(x - ct),$$

où σ est une fonction périodique et où $c \in \mathbf{R}^2$ est un vecteur constant indépendant de t et de x . On parle d'onde progressive.



Les équations régissant la propagation des ondes de gravité posent de nombreuses questions qui demeurent mal comprises. Un océanographe ne cherche pas à les résoudre. Il cherche au contraire des modèles simples qui permettent de bien décrire en première approximation la dynamique de ces ondes. Pour des solutions d'amplitude $\varepsilon \in [0, 1]$ petite, il négligera dans les équations les termes d'ordre deux ou plus en ε . Cela correspond à une théorie linéaire des ondes de gravité qui a été très étudiée aux dix-huitième et dix-neuvième siècles (notamment par Laplace, Lagrange, Cauchy et Poisson, voir [5]). Dans cette théorie linéaire Σ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 \Sigma}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

où g désigne l'accélération de la gravité. On calcule aisément que si

$$\Sigma(t, x) = \varepsilon \cos(k \cdot x - \omega t) \quad \text{où } (k, \omega) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$$

est solution de cette équation, alors

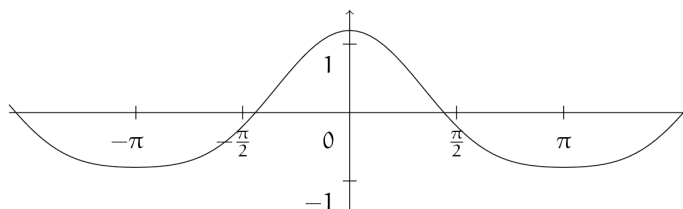
$$\omega^2 = g |k| \quad \text{où } |k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Notons que $\varepsilon \cos(k \cdot x - \omega t)$ peut s'écrire sous la forme $\sigma(x - ct)$ avec $\sigma(X) = \varepsilon \cos(k \cdot X)$ et $c = \frac{\omega}{|k|^2} k$. La relation précédente implique que

$$|c| = \frac{|\omega|}{|k|} = \sqrt{\frac{g}{|k|}}.$$

Comme $|c|$ correspond à la vitesse de l'onde, cela signifie que des harmoniques de longueurs d'onde différentes se propagent à des vitesses différentes et ainsi elles tendent à se séparer. Cela explique qu'en un certain endroit au dessus de l'océan, loin de la zone de vent, la surface de l'océan soit très régulière car représentable

essentiellement à l'aide d'une seule harmonique². Néanmoins, l'océanographe constate que si la surface de l'océan a une forme sinueuse, elle n'est pas le graphe d'une sinusoïde. Il y a des arrêtes et des arrondis légèrement marqués qui suggèrent la présence de plusieurs harmoniques. Ce que l'on observe sur le graphe de la fonction $\cos(x) + 0,2 \cos(2x)$ dessiné ci-dessous.



Or nous venons de voir que la théorie linéaire de la houle prédit que deux harmoniques de longueurs d'onde différentes se déplacent à des vitesses différentes. Par conséquent leur somme ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fonction de $x - ct$. C'est Stokes qui a résolu ce problème. Pour expliquer la forme des vagues, il a tenu compte des termes négligés dans la théorie linéaire. Cela nécessite beaucoup de calculs difficiles à expliquer et une idée très simple à énoncer. L'idée fondamentale de Stokes est que la relation de dispersion $\omega^2 = g|k|$ ne peut pas être exacte et qu'elle doit dépendre de l'amplitude ε . Les solutions approchées trouvées par Stokes sont de la forme

$$\Sigma_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \cos \theta + \frac{\varepsilon^2 |k_0|}{2} \cos(2\theta) + \frac{3\varepsilon^3 |k_0|^2}{8} \cos(3\theta) + O(\varepsilon^4),$$

où $|k_0|$ est la norme euclidienne de k_0 et où la phase θ et la pulsation ω sont données par

$$\theta = k_0 \cdot x - \omega t, \quad \omega = \sqrt{g |k_0|} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 |k_0|^2 + O(\varepsilon^4)\right)$$

Le travail de Stokes est un travail formel (son résultat est que si une solution existe, alors elle admet le développement précédent). C'est Levi-Civita qui a beaucoup plus tard réussi à montrer l'existence de solutions ayant ce développement ([10]). Les travaux de Levi-Civita ont connus de très nombreux prolongements (voir [11] pour de nombreuses références). Jusqu'aux travaux récents de looss et Plotnikov, tous les prolongements concernaient des solutions ayant la même structure particulière que les solutions de Stokes. Il y a en effet une remarque élémentaire que nous n'avons pas encore faite : les solutions de Stokes sont des ondes bi-dimensionnelles – on parle d'ondes bi-dimensionnelles lorsqu'on peut décrire le domaine du fluide à l'aide de deux variables seulement, par exemple x_1 et y . looss et Plotnikov ont

² C'est l'une des grandes conséquences du mémoire ([4]) de Cauchy : « Quant à l'état du fluide au bout d'un temps déterminé, il sera lui-même très-irrégulier dans les différents points de la masse fluide primitivement soumis à l'influence immédiate des causes qui ont produit le mouvement. Mais, si l'on s'éloigne de ces mêmes points à des distances de plus en plus grandes, on verra le mouvement devenir de plus en plus régulier. » Nous renvoyons à la page 83 de son mémoire pour une description précise de son résultat (qui est relié à ce que l'on appelle aujourd'hui les inégalités de dispersion).

démontré le premier résultat d'existence de solutions périodiques permanentes tri-dimensionnelles. C'est le résultat principal de leur mémoire à l'American Mathematical Society ([8]). Nous nous proposons de le décrire.

Disons le tout de suite, les solutions dont nous allons parler sont les solutions tri-dimensionnelles les plus simples que l'on puisse imaginer : elles résultent de l'interaction de deux ondes bi-dimensionnelles de même amplitude, qui font un certain angle entre elles. On appelle ces solutions des ondes en losange (diamond waves) à cause de leur symétrie. Comme nous le verrons c'est une question très naturelle, qui était ouverte depuis 80 ans. Toute la difficulté consiste à superposer des solutions d'un problème non linéaire. En revanche, ceci ne pose évidemment aucun problème pour la théorie linéaire. En effet, si

$$\Sigma_1(t, x) = \varepsilon \cos(x_1 - \tau x_2 - \omega t), \quad \Sigma_2(t, x) = \varepsilon \cos(x_1 + \tau x_2 - \omega t),$$

avec $\omega^2 = g\sqrt{1 + \tau^2}$ alors Σ_1 et Σ_2 sont solutions de

$$\frac{\partial^4 \Sigma_j}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma_j}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad j = 1, 2.$$

Trivialement, la somme $\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2$ est solution de

$$\frac{\partial^4 \Sigma_0}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

Observons maintenant que $\Sigma_j(t, x) = \cos(k_j \cdot x - \omega t)$ où

$$k_1 = (1, -\tau), \quad k_2 = (1, \tau).$$

Ainsi Σ_1 et Σ_2 sont deux solutions bi-dimensionnelles. Cependant, leur somme n'est certainement pas bi-dimensionnelle : on a

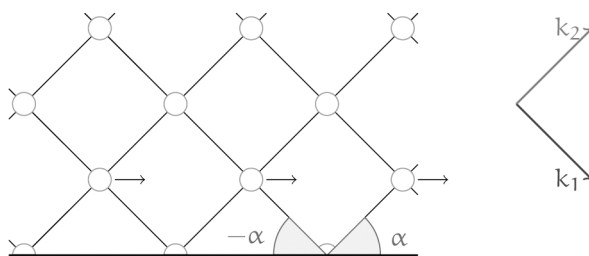
$$\Sigma_0(t, x) = 2\varepsilon \cos(x_1 - \omega t) \cos(\tau x_2),$$

que l'on peut écrire sous la forme $\sigma_0(x - ct)$ en prenant

$$\sigma_0(X_1, X_2) = 2\varepsilon \cos(X_1) \cos(\tau X_2), \quad c = (\omega, 0).$$

Ainsi en sommant deux solutions bi-dimensionnelles simples, on trouve une solution qui est tri-dimensionnelle. Iooss et Plotnikov ont démontré l'existence d'une solution (périodique et permanente) des équations des ondes de gravité au voisinage de la fonction Σ_0 (au moins pour certaines valeurs des paramètres ε et τ , comme nous le verrons à la section suivante). Ils ont démontré l'existence de ce que l'on appelle des « vagues à courtes crêtes » (short crested waves). Cela correspond à la réflexion non orthogonale d'une onde de Stokes sur un mur (la réflexion orthogonale correspondant au « clapotis », où les ondes sont stationnaires et restent bi-dimensionnelles). Illustrons les observations précédentes dans le cas $\tau = 1$. Noter que les crêtes (maxima locaux) sont à l'intersection des crêtes de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Elles sont représentées par des cercles. Ces crêtes forment une structure en losange qui se déplace vers la droite en restant parallèle au bord.

Même si je n'en parlerai pas dans ce texte, j'aimerais mentionner un second théorème de Iooss et Plotnikov qui prouve l'existence d'ondes progressives non symétriques ([9]). Ce résultat restera longtemps une référence. Autant pour



l'admiration devant certains calculs intrinsèquement durs dans la démonstration, que pour avoir réussi l'exploit rarissime de prouver l'existence d'ondes qu'aucun expérimentateur n'a réussi à reproduire dans un bassin, la difficulté technique étant beaucoup plus grande que pour produire un train de vagues symétrique par rapport à la direction de propagation.

Le résultat principal de Ioss et Plotnikov est énoncé à la section 5.

2. Petits diviseurs

Revenons sur l'équation de la théorie linéaire

$$(1) \quad \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

C'est ainsi que Cauchy la formule dans son mémoire [4], mais ce n'est plus comme cela qu'on l'écrirait aujourd'hui. Avec des outils modernes d'analyse de Fourier (que l'on doit en partie à Cauchy d'ailleurs) on préférera utiliser la racine carrée de l'opposé du Laplacien. C'est l'opérateur, noté $|D_x|$, qui est défini par la formule

$$|D_x| e^{i\xi \cdot x} = |\xi| e^{i\xi \cdot x},$$

où $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ est la norme euclidienne de $\xi \in \mathbf{R}^2$. Notons que

$$|D_x|^2 e^{i\xi \cdot x} = |\xi|^2 e^{i\xi \cdot x} = -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) e^{i\xi \cdot x}.$$

Avec cet opérateur, (1) est une conséquence du fait que Σ vérifie en fait

$$\partial_t^2 \Sigma + g |D_x| \Sigma = 0.$$

Nous expliquerons d'où vient cette équation plus tard.

Considérons une solution de la forme $\Sigma(t, x) = \sigma(x - ct)$ où $c = (v, 0)$ et où σ est bi-périodique, au sens où

$$(2) \quad \sigma(x) = \sigma(x_1 + 2\pi, x_2) = \sigma\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right),$$

pour un certain paramètre $\tau > 0$. Puisque $\partial_t \Sigma(t, x) = -v(\partial_{x_1} \sigma)(x - ct)$, l'équation précédente entraîne que σ est dans le noyau de l'opérateur

$$(3) \quad v^2 \partial_{x_1}^2 + g |D_x|.$$

Introduisons le paramètre $\nu_0 = v^2/g > 0$ de sorte que l'opérateur (3) soit égal à une constante multiplicative près à

$$L_{\nu_0}(\partial_x) = |D_x| + \nu_0 \partial_{x_1}^2.$$

Introduisons aussi le symbole $L_{\nu_0}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$L_{\nu_0}(\xi) = |\xi| - \nu_0 \xi_1^2,$$

de sorte que

$$L_{\nu_0}(\partial_x) e^{i\xi \cdot x} = L_{\nu_0}(\xi) e^{i\xi \cdot x}.$$

Maintenant, il est très simple de trouver une fonction bi-périodique (non triviale) dans le noyau de l'opérateur $L_{\nu_0}(\partial_x)$. Il suffit de trouver un couple $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$ tel que

$$L_{\nu_0}(k_1, \tau k_2) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_0 k_1^2 = 0.$$

Ici ν_0 est un paramètre qui n'est pas prescrit. Dans la suite nous allons étudier ce qu'il se passe pour la valeur particulière

$$\nu_c = (1 + \tau^2)^{1/2}$$

du paramètre ν_0 . C'est une valeur très particulière car dans ce cas on a une solution évidente $k = (1, 1)$. Mais on veut éviter le cas (rare) où cette équation aurait trop de solutions. Dans toute la suite, nous supposons que pour $\nu_c = (1 + \tau^2)^{1/2}$ l'équation

$$(4) \quad \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 = 0,$$

n'admet dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ que la solution $(k_1, k_2) = (1, 1)$. C'est une hypothèse sur τ qui n'est pas toujours vérifiée (par exemple si τ est l'inverse d'un entier). Notons alors \mathcal{K} l'ensemble des solutions $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ de (4). On a

$$\mathcal{K} = \{ (0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) \}.$$

Cela nous donne la structure du noyau de L_{ν_c} . Une étude précise de l'opérateur L_{ν_c} exige aussi d'avoir une estimation de l'inverse (dans l'orthogonal du noyau dans un certain espace). Faire agir l'opérateur $L_{\nu_c}(\partial_x)$ c'est multiplier en Fourier par le symbole $L_{\nu_c}(\xi)$. Il est donc naturel que pour "inverser" $L_{\nu_c}(\partial_x)$ on divise par le symbole. Ainsi, estimer la norme d'opérateur (entre deux certains espaces) de l'inverse de $L_{\nu_c}(\partial_x)$ revient à trouver une estimation de

$$\left(\sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 \right)^{-1},$$

pour $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}$.

On ne peut pas espérer avoir facilement une telle estimation car le symbole $L_{\nu_c}(\xi)$ s'annule sur un ensemble non borné de \mathbf{R}^2 . C'est un problème qui apparaît dans des contextes variés. On parle de problèmes de petits diviseurs. Cependant on

peut montrer par des arguments classiques³ que ce problème concerne « peu » de valeurs du paramètre τ . Plus précisément, on peut montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1]$, il existe une constante C_α et un ensemble $N_\alpha \subset [1, +\infty[$ dont le complémentaire est de mesure nulle, tel que si $\nu_c = \sqrt{1 + \tau^2} \in N_\alpha$, alors

$$(5) \quad \forall k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}, \quad \left| \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 \right| \geq c |k|^{-(1+\alpha)/2}.$$

Mais ce résultat ne peut pas suffire. En effet, l'estimation précédente intervient pour estimer l'inverse du linéarisé autour de la solution triviale. Pour démontrer l'existence de solutions nous avons besoin d'estimer l'inverse dans un voisinage de cette solution. Ce dont nous avons besoin c'est de vérifier que l'estimation précédente est « stable » par perturbation. Perturbation de ν_c et aussi perturbation d'une autre constante qui était invisible jusqu'ici car égale à 0. Considérons deux fonctions $\nu(\varepsilon)$ et $\kappa(\varepsilon)$ du paramètre $\varepsilon \in [0, 1]$, telles que

$$\nu(\varepsilon) = \nu_c - \varepsilon^2 \nu_1 + \varepsilon^3 \tilde{\nu}(\varepsilon), \quad \kappa(\varepsilon) = \varepsilon^2 \tilde{\kappa}(\varepsilon),$$

avec l'hypothèse que $\tilde{\nu}$ et $\tilde{\kappa}$ sont lipschitziennes par rapport à ε . On considère alors le symbole

$$L_\varepsilon(k) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu(\varepsilon) k_1^2 - \kappa(\varepsilon),$$

de sorte que $L_{\varepsilon=0}(k) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2$. looss et Plotnikov démontrent le résultat suivant.

Théorème 1. *Dans le développement de la fonction $\nu(\varepsilon)$, supposons de plus que $\nu_c \in \mathcal{N}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in]0, 1/78[$ (où \mathcal{N}_α est l'ensemble des paramètres ν_c tels que (5) est vérifiée) et que*

$$\nu_1 \neq 0.$$

Alors il existe une constante $c > 0$ et un ensemble \mathcal{E} vérifiant

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r^2} \int_{\mathcal{E} \cap [0, r]} t \, dt = 1,$$

tels que si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}$, alors

$$(6) \quad |L_\varepsilon(k)| \geq \frac{c}{|k|}.$$

³ On dit qu'un irrationnel $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est un nombre diophantien s'il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $q > 0$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma q^{-2-\alpha}.$$

Le complémentaire de l'ensemble des nombres diophantiens est un ensemble de mesure nulle. Au sens de la mesure, il y a donc « peu » de nombres qui ne sont pas diophantiens. Cependant cet ensemble complémentaire est un G_δ -dense. Nous renvoyons le lecteur au texte d'Étienne Ghys [6] pour une introduction aux problèmes de petits diviseurs dans le contexte de la mécanique céleste.

Il s'agit maintenant de comprendre ce que cela implique pour l'opérateur $L_\varepsilon(\partial_x)$ défini par

$$L_\varepsilon(\partial_x)\sigma = |D_x|\sigma + \nu(\varepsilon)\partial_{x_1}^2\sigma - \kappa(\varepsilon)\sigma.$$

Si σ est bi-périodique (cf (2)) on peut la représenter comme une somme d'harmoniques

$$\sigma = \sum_{\xi \in \Gamma'} \widehat{\sigma}(\xi) e^{i\xi \cdot x},$$

où Γ' est le réseau engendré par les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, \tau)$ et où

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi/\tau]} e^{-i\xi \cdot x} \sigma(x) dx.$$

Pour $\xi \in \Gamma'$ on a $\xi = (k_1, \tau k_2)$ pour un certain couple d'entiers $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ et alors

$$\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi) = L_\varepsilon(k)\widehat{\sigma}(\xi).$$

L'estimation (6) implique alors qu'il existe une constante C telle que pour tout $\xi \in \Gamma'$ avec $\xi \notin \{(0, 0), (\pm 1, \pm \tau)\}$, on ait

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \leq C |\xi| |\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)|.$$

Comme

$$|\xi| |\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)| = |\partial_x \widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)|,$$

cela implique que les coefficients de Fourier de σ sont estimés par ceux des dérivées de la fonction $L_\varepsilon(\partial_x)\sigma$. Or un fait bien connu est que la régularité d'une fonction se lit sur la décroissance de ses coefficients de Fourier.

Cet argument heuristique suggère que l'on va pouvoir inverser $L_\varepsilon(\partial_x)$ au prix de la perte d'une dérivée. Le problème est que pour résoudre une équation non linéaire, les méthodes standards reposent sur la construction d'une suite de solutions approchées, la solution étant obtenue par passage à la limite (exactement comme dans la méthode de Picard pour résoudre une équation différentielle ordinaire). Le problème est alors clair, si à chaque étape on perd une dérivée, en un nombre fini d'étapes les objets ne seront tout simplement plus définis. Il y a des stratégies qui permettent de contourner cet obstacle, mais elles sont toujours assez difficiles à mettre en place (Iooss et Plotnikov utilisent un schéma de Nash-Moser).

Notons que ces problèmes n'apparaissent pas dans l'étude des ondes bi-dimensionnelles. En effet, dans le cas où σ est indépendant de x_2 , si $L_\varepsilon(\partial_x)\sigma$ est C^k alors σ est (presque) C^{k+1} . Ce qui est beaucoup plus favorable. Cela permet de montrer en particulier que si la solution a un certain niveau minimal de régularité pour que les termes soient bien définis, alors elle est automatiquement très régulière. Ainsi, il a été démontré dans les années 1950 par Hans Lewy et indépendamment par Robert Gerber que si la surface libre est une courbe C^1 alors elle est analytique. Ce résultat étant optimal car on peut construire des solutions qui sont Lipschitziennes et pas mieux (voir les notes de cours de John F. Toland [11]).

3. L'opérateur de Dirichlet–Neumann

Pour décrire une vague, nous avons besoin d'introduire deux quantités : l'élévation de la mer, notée Σ , par rapport à son niveau au repos et le potentiel des vitesses des particules du fluide, noté Φ , qui lui aussi est mesuré par rapport à l'état au repos. L'état au repos correspond donc par notation au cas où $\Sigma = 0$ et $\Phi = 0$.

L'inconnue Σ dépend du temps t et de la variable spatiale $x = (x_1, x_2)$. Le graphe de la fonction Σ est ce que l'on a appelé la surface libre. Le domaine occupé par l'eau à l'instant t est le demi-espace, noté Ω_t , qui est situé sous la surface libre :

$$\Omega_t = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid y < \Sigma(t, x) \}.$$

L'inconnue Φ dépend de t , x et aussi de y . À l'instant t , Φ est définie dans tout le domaine Ω_t . Nous ne considérerons que des écoulements incompressibles, de sorte que Φ est une fonction harmonique, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_t.$$

Dès lors, pour déterminer Φ , il suffit de connaître sa trace au bord du domaine, qui est la fonction, notée Ψ dans la suite, définie par

$$\Psi(t, x) = \Phi(t, x, \Sigma(t, x)).$$

Un intérêt de cette notation est que maintenant le problème ne dépend que de deux inconnues qui sont des fonctions du temps t et de la variable $x \in \mathbf{R}^2$.

Pour énoncer les équations qui régissent la propagation d'ondes de gravité, nous avons besoin d'introduire l'opérateur de Dirichlet–Neumann. Cet opérateur intervient dans de nombreuses situations en analyse. Il joue un rôle central dans l'étude des vagues depuis les travaux de Walter Craig et de ses collaborateurs.

Par définition c'est l'opérateur qui à une fonction f définie sur le bord d'un domaine $\partial\Omega$ associe la dérivée normale de son extension harmonique. Ici, il est plus commode d'introduire un coefficient dans la définition. Dans la suite, étant données deux fonctions σ et ψ de la variable $x \in \mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$), $G(\sigma)$ désignera l'opérateur de Dirichlet-Neumann, qui est défini par

$$\begin{aligned} G(\sigma)\psi(x) &= \sqrt{1 + |\nabla\sigma|^2} \partial_n \varphi|_{y=\sigma(x)} \\ &= (\partial_y \varphi)(x, \sigma(x)) - \nabla\sigma(x) \cdot (\nabla\varphi)(x, \sigma(x)), \end{aligned}$$

où $\varphi = \varphi(x, y)$ est la solution de l'équation de Laplace

$$(7) \quad \Delta_{x,y} \varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega := \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid y < \sigma(x) \},$$

avec comme conditions aux limites

$$(8) \quad \varphi(x, \sigma(x)) = \psi(x), \quad \nabla_{x,y} \varphi(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty.$$

Cet opérateur est bien défini sous des hypothèses qui sont toujours vérifiées dans notre contexte (si σ est une fonction lipschitzienne et si ψ appartient à l'espace de Sobolev H^1 , alors on peut montrer que $G(\sigma)\psi$ appartient à l'espace de Lebesgue L^2).

Nous allons voir que

$$G(0) = |D_x|,$$

où $|D_x|$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$ qui a déjà été introduit. En effet, supposons que

$$(9) \quad \Delta_{x,y}\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid y < 0\},$$

et introduisons la transformée de Fourier de φ par rapport à x :

$$u(\xi, y) = \int e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x, y) dx.$$

Alors u vérifie l'équation

$$\partial_y^2 u - |\xi|^2 u = 0.$$

La solution $e^{-y|\xi|}$ étant à exclure car ici $y < 0$, on trouve que

$$u = e^{y|\xi|} u(\xi, 0)$$

ce qui entraîne $(\partial_y \varphi)(x, 0) = (|D_x| \varphi)(x, 0)$ et donc le résultat voulu.

Bien sûr $G(\sigma)\psi$ dépend linéairement de ψ . Quant à sa dépendance en σ on peut montrer qu'elle est analytique en utilisant des résultats de Ronald R. Coifman et Yves Meyer. On a également une formule due à David Lannes qui donne la première dérivée de $G(\sigma)\psi$ par rapport à σ . En notant

$$d_\sigma G(\sigma)\psi \cdot \dot{\sigma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (G(\sigma + \varepsilon \dot{\sigma})\psi - G(\sigma)\psi)$$

on a

$$(10) \quad d_\sigma G(\sigma)\psi \cdot \dot{\sigma} = -G(\sigma)(B\dot{\sigma}) - \operatorname{div}(V\dot{\sigma})$$

avec

$$B = (\partial_y \varphi)(x, \sigma(x)), \quad V = (\partial_x \varphi)(x, \sigma(x)),$$

où φ désigne l'extension harmonique de ψ .

4. Le problème de Cauchy

Les équations qui régissent la propagation des ondes de gravité sont données par une condition cinématique (non décollement des particules de la surface) et une condition dynamique (équilibre des forces à la surface). Avec les notations précédentes, les équations sont les suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} \partial_t \Sigma - G(\Sigma)\Psi = 0, \\ \partial_t \Psi + g\Sigma + \frac{1}{2} |\nabla \Psi|^2 - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \Sigma \cdot \nabla \Psi + G(\Sigma)\Psi)^2}{1 + |\nabla \Sigma|^2} = 0, \end{cases}$$

où les inconnues sont $\Sigma = \Sigma(t, x)$, $\Psi = \Psi(t, x)$ ($x \in \mathbf{R}^d$, $d \in \{1, 2\}$), $G(\Sigma)$ est l'opérateur de Dirichlet-Neumann que nous avons introduit au paragraphe précédent et $g > 0$ est l'accélération de la gravité.

On peut maintenant expliquer d'où vient l'équation (1). Si on néglige les termes qui sont quadratiques par rapport aux inconnues, on obtient le système suivant

$$\partial_t \Sigma = G(0)\Psi, \quad \partial_t \Psi + g\Sigma = 0.$$

En utilisant que $G(0) = |D_x|$ et en dérivant en temps on obtient

$$\partial_t^2 \Sigma + g |D_x| \Sigma = 0,$$

et donc l'équation de Cauchy (1).

Mais ce n'est pas ce petit calcul qui explique le titre de cette section. On appelle problème de Cauchy la résolution d'une équation d'évolution pour laquelle on se donne des données initiales. Nous imposerons dans la suite que

$$(12) \quad \Sigma(0, x) = \Sigma_0(x), \quad \Psi(0, x) = \Psi_0(x)$$

où Σ_0 et Ψ_0 sont des fonctions données. On rajoute aussi une condition au bord du domaine, ce que l'on appelle une condition aux limites. Il est important pour la suite de comprendre la distinction entre deux cas bien différents : a) le cas de données initiales décroissant à l'infini au sens où Σ_0 et Ψ_0 sont de carré intégrable ainsi que toutes leurs dérivées (cela contient les fonctions C^∞ à support compact). b) le cas de données initiales C^∞ et bi-périodiques, ce qui signifiera dans la suite qu'il existe un nombre $\tau > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \Sigma_0(x) &= \Sigma_0(x_1 + 2\pi, x_2) = \Sigma_0\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right), \\ \Psi_0(x) &= \Psi_0(x_1 + 2\pi, x_2) = \Psi_0\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right). \end{aligned}$$

On notera $C^k(\mathbf{T}_\tau^2)$ l'espace des fonctions de classe C^k qui sont bi-périodiques.

Il y a bien sûr une autre dichotomie fondamentale : solutions analytiques versus solutions C^∞ . Nous n'en parlerons pas car l'analyticité est pour l'étude de ce problème de Cauchy une hypothèse simplificatrice.

Venons en aux résultats sur le problème de Cauchy. Les premiers résultats sans hypothèse de petitesse sont dus à Klaus Beyer et Matthias Günther ainsi qu'à Sijue Wu.

Théorème 2. *Pour $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)^2$ bi-périodique, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy pour (11) avec donnée initiale (Σ_0, Ψ_0) a une unique solution $(\Sigma, \Psi) \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{T}_\tau^2)^2$ bi-périodique en x .*

Théorème 3. *Pour tout $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)^2$ à support compact, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy pour (11) avec donnée initiale (Σ_0, Ψ_0) a une unique solution (Σ, Ψ) dans $C^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^2)^2$ vérifiant*

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Sigma(t, x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Psi(t, x)|^2 dx < +\infty$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^2$ et pour tout $t \in [0, T]$.

Ces deux théorèmes se démontrent exactement de la même manière.

Afin de simplifier le plus possible les énoncés de ces résultats, nous n'avons considéré que des données C^∞ . Les résultats de Beyer-Günther et Wu sont en fait vrais sous des hypothèses plus générales, qui ne demandent qu'une régularité limitée sur les données initiales. Naturellement, une question est de déterminer la régularité minimale à imposer aux données initiales pour pouvoir résoudre le problème de Cauchy. Dans une série de travaux avec Nicolas Burq et Claude Zuily,

nous montrons que l'on peut résoudre le problème de Cauchy sous des hypothèses qui autorisent la vitesse à être un peu moins régulière que C^1 .

Dans une autre direction, il a été démontré très récemment par Sijue Wu et aussi par Pierre Germain, Jallal Shatah et Nader Masmoudi que l'on a existence globale à donnée petite.

Théorème 4. *Considérons $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)^2$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, le problème de Cauchy pour (11) avec donnée initiale $(\varepsilon\Sigma_0, \varepsilon\Psi_0)$ a une unique solution $(\Sigma, \Psi) \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbf{R}^2)^2$ vérifiant*

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Sigma(t, x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Psi(t, x)|^2 dx < +\infty$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$.

Un résultat d'existence globale à donnée petite pour le cas où \mathbf{R}^2 serait remplacé par \mathbf{R} serait spectaculaire (toutefois Wu a démontré un résultat d'existence presque globale en temps). On a *aucun analogue* de ce résultat pour des solutions bi-périodiques. (La dispersion entraîne un phénomène de décroissance de la norme L^∞ dans le cas de l'espace entier, mais pas dans le cas de solutions périodiques.)

5. Le résultat de Iooss et Plotnikov

Le résultat de Iooss et Plotnikov est énoncé dans cette section.

5.1. Les équations

On va chercher des ondes de gravité bi-périodiques et permanentes. C'est-à-dire des solutions du système (11) de la forme

$$\Sigma(t, x) = \sigma(x - ct), \quad \Psi(t, x) = \psi(x - ct),$$

où σ et ψ sont des fonctions bi-périodiques et où $c \in \mathbf{R}^2$.

En utilisant l'opérateur de Dirichlet-Neumann $G(\sigma)$ (défini à la section 3), un calcul direct donne que nous sommes amenés à étudier un système de deux équations scalaires, qui s'écrit

$$\begin{cases} G(\sigma)\psi - c \cdot \nabla \sigma = 0, \\ g\sigma + c \cdot \nabla \psi + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \sigma \cdot \nabla \psi + c \cdot \nabla \sigma)^2}{1 + |\nabla \sigma|^2} = 0. \end{cases}$$

Quitte à faire une rotation des axes et à remplacer g par $\mu := g/|c|^2$, on peut supposer que $c = (1, 0)$, ce qui donne le système suivant

$$(13) \quad \begin{cases} G(\sigma)\psi - \partial_{x_1} \sigma = 0, \\ \mu\sigma + \partial_{x_1} \psi + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \frac{1}{2} \frac{(\nabla \sigma \cdot \nabla \psi + \partial_{x_1} \sigma)^2}{1 + |\nabla \sigma|^2} = 0, \end{cases}$$

où les inconnues sont $\sigma, \psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ et où μ est un paramètre positif. Notons le système précédent sous la forme compacte

$$\mathcal{E}(\mu, \sigma, \psi) = 0.$$

5.2. La forme voulue des solutions

On cherche des triplets (μ, σ, ψ) tels que $\mathcal{E}(\mu, \sigma, \psi) = 0$. Par définition, les « diamond waves » sont des solutions (σ, ψ) du système (13) qui sont périodiques en x_1 et en x_2 , et qui de plus vérifient des conditions de symétrie par rapport à la direction de propagation. A savoir : σ est paire en x_1 et paire en x_2 ; ψ est impaire en x_1 et paire en x_2 . De plus ces fonctions sont bi-périodiques :

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma(x_1 + 2\pi, x_2) = \sigma\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right), \\ \psi(x) &= \psi(x_1 + 2\pi, x_2) = \psi\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right),\end{aligned}$$

pour un certain paramètre $\tau > 0$.

Pour construire des solutions à un problème non linéaire, une remarque banale est d'en chercher sous la forme de très petites perturbations de solutions de petite amplitude du système linéarisé autour d'une solution triviale (ici la solution nulle $(\sigma, \psi) = (0, 0)$). Les solutions de looss et Plotnikov sont justement cherchées sous la forme

$$(14) \quad \begin{aligned}\sigma^\varepsilon(x) &= \varepsilon\sigma_1(x) + \varepsilon^2\sigma_2(x) + \varepsilon^3\sigma_3(x) + O(\varepsilon^4), \\ \psi^\varepsilon(x) &= \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \varepsilon^3\psi_3(x) + O(\varepsilon^4), \\ \mu^\varepsilon &= \mu_c + \varepsilon^2\mu_1 + O(\varepsilon^4),\end{aligned}$$

où $\varepsilon \in [0, 1]$ est un petit paramètre et

$$\mu_c := \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad \sigma_1(x) := -\frac{1}{\mu_c} \cos x_1 \cos(\tau x_2), \quad \psi_1(x) := \sin x_1 \cos(\tau x_2).$$

Noter que (σ_1, ψ_1) est une solution du linéarisé autour de la solution triviale $(0, 0)$, qui de plus vérifie les conditions énoncées précédemment. Le fait que l'on fasse dépendre μ du petit paramètre ε ne va pas de soi. C'est l'idée fondamentale due à Stokes.

5.3. Une contrainte sur l'amplitude

La difficulté principale est que le système (13) n'est pas elliptique. En effet, on calcule facilement que le déterminant du symbole du linéarisé autour de la solution triviale $(\sigma, \psi) = (0, 0)$ est égal à

$$\mu \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \xi_1^2,$$

qui s'annule sur un ensemble non borné de \mathbf{R}^2 . Cette observation suggère la présence de petits diviseurs. La contribution essentielle de looss et Plotnikov a été précisément d'obtenir une majoration de l'inverse du symbole du linéarisé autour d'un état non trivial sous une condition diophantienne. Cela nécessite de considérer des valeurs des paramètres τ et ε telles que l'estimation du théorème 1 est vérifiée.

5.4. Le résultat

Rappelons que $C^k(\mathbf{T}_\tau^2)$ désigne l'espace des fonction f de classe C^k et telles que

$$f(x) = f(x_1 + 2\pi, x_2) = f\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right).$$

Théorème 5. *Soit $\tau \in]0, +\infty[$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 23$ et $\mu_c = (1 + \tau^2)^{-1/2}$. Il existe un ensemble $A \subset [0, 1]$ de mesure de Lebesgue égale à 1 tel que, pour tout $\mu_c \in A$, il existe un ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{E}(k, \mu_c)$ vérifiant*

$$(15) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r^2} \int_{\mathcal{E} \cap [0, r]} t \, dt = 1,$$

et une famille $\{(\mu^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathcal{E}\}$ de solutions de

$$\begin{cases} G(\sigma^\varepsilon)\psi^\varepsilon - \partial_{x_1}\sigma^\varepsilon = 0, \\ \mu^\varepsilon\sigma^\varepsilon + \partial_{x_1}\psi^\varepsilon + \frac{1}{2}|\nabla\psi^\varepsilon|^2 - \frac{1}{2}\frac{(\nabla\sigma^\varepsilon \cdot \nabla\psi^\varepsilon + \partial_{x_1}\sigma^\varepsilon)^2}{1 + |\nabla\sigma^\varepsilon|^2} = 0, \end{cases}$$

telle que

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon(x) &= \varepsilon\sigma_1(x) + \varepsilon^2\sigma_2(x) + \varepsilon^3\sigma_3(x) + \varepsilon^4\Sigma^\varepsilon(x), \\ \psi^\varepsilon(x) &= \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \varepsilon^3\psi_3(x) + \varepsilon^4\Psi^\varepsilon(x), \\ \mu^\varepsilon &= \mu_c + \varepsilon^2\mu_1 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C^\infty(\mathbf{T}_\tau^2)$ avec

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= -\frac{1}{\mu_c} \cos(x_1) \cos(\tau x_2), \\ \psi_1(x) &= \sin(x_1) \cos(\tau x_2), \\ \mu_1 &= \frac{1}{4\mu_c^3} - \frac{1}{2\mu_c^2} - \frac{3}{4\mu_c} + 2 + \frac{\mu_c}{2} - \frac{9}{4(2 - \mu_c)}, \end{aligned}$$

et où les restes $\Sigma^\varepsilon, \Psi^\varepsilon$ sont uniformément bornés dans $C^k(\mathbf{T}_\tau^2)$.

Avec Guy Métivier, nous avons démontré un résultat de régularité *a priori* pour des diamond waves sous une hypothèse diophantienne plus faible que celle qui assure l'existence des solutions de Iooss et Plotnikov (voir [1]). En particulier, notre résultat démontre l'infinie régularité de ces solutions. On peut conjecturer que les solutions de Iooss et Plotnikov sont en fait analytiques.

6. Espaces de Sobolev

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les espaces usuels de fonctions de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}$. Pour étudier une EDP il y a de nombreux espaces qui sont utiles : les espaces de Lebesgue L^p , les espaces de Hölder $C^{k,\alpha}$ et les espaces de Sobolev H^s . Pour diverses raisons il sera plus commode de travailler avec les espaces de Sobolev.

Définition. Étant donné un indice $s \geq 0$ et $\tau > 0$, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}_\tau^2)$ telles que

$$\|f\|_{H^s} = \left(\sum_{\xi \in \Gamma'} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

où $\Gamma' = \{ (n_1, n_2\tau) : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \}$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \times [0,2\pi/\tau]} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

On vérifie facilement que $H^1(\mathbf{T}_\tau^2)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}_\tau^2)$ dont la dérivée au sens des distributions est dans $L^2(\mathbf{T}_\tau^2)$. Plus généralement, pour $k \in \mathbf{N}^*$, on vérifie que $H^k(\mathbf{T}_\tau^2)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}_\tau^2)$ dont la dérivée au sens des distributions appartient à $H^{k-1}(\mathbf{T}_\tau^2)$.

Si $s > 1$ alors $H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ est inclus dans l'espace $C^0(\mathbf{T}_\tau^2)$. Plus généralement si $s > 1 + k$ avec $k \in \mathbf{N}$ alors $H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ est inclus dans $C^k(\mathbf{T}_\tau^2)$.

7. Le calcul paradifférentiel de Bony

Le but de cette partie est d'introduire aussi simplement que possible les opérateurs paradifférentiels et la notion de paralinéarisation d'une équation non linéaire.

Rappelons la définition du support singulier d'une fonction : c'est le complémentaire des points au voisinage desquels u est de classe C^∞ (cette définition est valable plus généralement pour une distribution). On note *sing suppu* le support singulier de u . Cet ensemble est vide si la fonction est de classe C^∞ . Le support singulier de la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$) est le singleton $\{0\}$. Il y a un objet plus fin et qui est fondamental dans l'étude des singularités. C'est le front d'onde dont on va rappeler la définition. Cet outil sert à comprendre la propagation des singularités.

Le front d'onde d'une distribution tempérée f , noté $WF(f)$, est l'ensemble des singularités microlocales de f . Cet ensemble est défini par son complémentaire.

Définition. Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$. On dit que $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ si il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ non nulle en x_0 et un voisinage W de ξ_0 tels que la transformée de Fourier $\widehat{\varphi f}$ soit à décroissance rapide dans les directions voisines de ξ_0 i.e.

$$\forall N \in \mathbf{N}, \exists C_N > 0 : \forall \xi \in W, \quad \left| \widehat{\varphi f}(\lambda \xi) \right| \leq C_N \lambda^{-N}.$$

Si P est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞ ,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad (D_x = \frac{1}{i} \partial_x)$$

une question importante en EDP est de déterminer le front d'onde des solutions distributions de l'équation

$$(16) \quad Pf = 0.$$

Un objet géométrique important est constitué par la variété caractéristique de P que l'on note $Car(P)$ et qui est le fermé (homogène en ξ) défini par

$$Car(P) = \{ (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d ; p_m(x, \xi) = 0 \} \quad \text{où} \quad p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Le premier résultat important de la théorie est le suivant : les singularités des solutions de (16) sont contenues dans la variété caractéristique i.e.

$$(17) \quad WF(f) \subset Car(P).$$

La démonstration de (17) commence par une remarque. En notant

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x) \xi^\alpha$$

nous avons

$$P(f)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} p(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

La remarque en question est que le membre de droite peut être défini, au sens des intégrales oscillantes, si au lieu de demander que p soit un polynôme en ξ on demande juste qu'il vérifie certaines estimations de décroissance lorsqu'on le dérive. Commençons par donner un sens à cette affirmation.

Définition. Soit $m \in \mathbf{R}$. La classe des symboles d'ordre m , notée $S^m(\mathbf{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ à valeurs complexes telles que, pour tout α et β dans \mathbf{N}^d , il existe une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que

$$\forall (x, \xi) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d, \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\beta|}.$$

Pour tout $a \in S^m(\mathbf{R}^d)$, toute fonction u dans la classe de Schwartz $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et tout $x \in \mathbf{R}^d$, la fonction $\xi \mapsto a(x, \xi) \widehat{u}(\xi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}_\xi^d)$. A fortiori elle est intégrable et on peut définir

$$Op(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

De plus on peut vérifier que la formule précédente définit une fonction $Op(a)u$ de \mathcal{S} et que $Op(a)$ est continu de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . On peut alors par dualité étendre $Op(a)$ à l'espace des distributions tempérées \mathcal{S}' .

Bien sûr $p \in S^m$. Le point important est que si p ne s'annule pas alors $1/p \in S^{-m}$. Le point central pour démontrer (17) est que par des localisations on peut se ramener au cas où p ne s'annule pas.

Le calcul paradifférentiel a été introduit par Jean-Michel Bony pour étudier les singularités des équations aux dérivées partielles non linéaires, de la forme

$$F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}) = 0.$$

On ne sait pas décrire pour une équation aussi générale l'ensemble des points où la fonction n'est pas microlocalement C^∞ . En particulier on ne connaît pas d'analogue du résultat (17) précédent. En revanche, grâce au calcul paradifférentiel, on peut dire des choses si l'on remplace C^∞ par un espace de fonctions à régularité limitée (par exemple H^r avec $r < +\infty$). Pour cela nous utiliserons la définition suivante.

On dit que u est microlocalement H^r en (x_0, ξ_0) si il existe un symbole $\varphi = \varphi(x, \xi)$ homogène d'ordre 0 en ξ , vérifiant $\varphi(x_0, \xi_0) \neq 0$, tel que $Op(\varphi)u \in H^r$.

Théorème 6. Soit $d, m \geq 1$ et $s_0 = d/2 + m$. Considérons une solution $f \in H^s$ avec $s > s_0$ de

$$(18) \quad F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}) = 0.$$

Introduisons le symbole

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial f_\alpha}((\partial_x^\alpha f(x))_{|\alpha| \leq m})(i\xi)^\alpha.$$

En tout point $(x_0, \xi_0) \in \mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ tel que $p_m(x_0, \xi_0) \neq 0$, f est microlocalement deux fois plus régulière : elle est microlocalement de classe H^t pour tout $t < 2s - s_0$.

Dans l'énoncé précédent, le symbole p_m dépend de l'inconnue f et on est amené à travailler avec des symboles de régularité limitée.

Définition. Soit $m \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$. La classe des symboles d'ordre m et de régularité C^k en x , notée $\Gamma_k^m(\mathbf{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions $a = a(x, \xi)$ telles que, pour tout multi-indice β dans \mathbf{N}^d , il existe une constante C_β telle que

$$\|\partial_\xi^\beta a(\cdot, \xi)\|_{C^k} \leq C_\beta(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

La quantification paradifférentielle de Bony associée à un symbole a l'opérateur T_a défini par

$$\widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-d} \int \chi(\xi - \eta, \eta) \widehat{a}(\xi - \eta, \eta) \psi(\eta) \widehat{u}(\eta) d\eta,$$

où $\widehat{a}(\theta, \xi) = \int e^{-ix \cdot \theta} a(x, \xi) dx$, et les fonctions de troncature ψ et χ vérifient

$$\psi(\eta) = 0 \quad \text{pour } |\eta| \leq 1, \quad \psi(\eta) = 1 \quad \text{pour } |\eta| \geq 2,$$

et, pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petits,

$$\chi(\theta, \eta) = 1 \quad \text{si } |\theta| \leq \varepsilon_1 |\eta|, \quad \chi(\theta, \eta) = 0 \quad \text{si } |\theta| \geq \varepsilon_2 |\eta|.$$

Le point central dans la démonstration du théorème précédent est de montrer que si f vérifie l'équation (18) alors

$$T_p f \in H^{t-m},$$

qui est une équation paradifférentielle. On dit que l'on a paralinéarisé (18).

8. Paralinéarisation de l'opérateur de Dirichlet–Neumann

Nous avons introduit la notion de paralinéarisation à la fin du paragraphe précédent. Avec Guy Métivier, notre approche a consisté à paralinéariser les équations des ondes de gravité. Pour cela le seul point difficile est de paralinéariser l'opérateur de Dirichlet–Neumann.

L'analyse microlocale de l'opérateur de Dirichlet–Neumann n'est pas nouvelle. On sait au moins depuis les travaux de Calderón que si σ est une fonction C^∞ , alors $G(\sigma)$ est un opérateur pseudo-différentiel classique, elliptique d'ordre 1. Dans ce cas, on calcule aisément que le symbole de $G(\sigma)$, noté λ_σ , a un développement (asymptotique) de la forme

$$(19) \quad \lambda_\sigma(x, \xi) \sim \lambda_\sigma^1(x, \xi) + \lambda_\sigma^0(x, \xi) + \lambda_\sigma^{-1}(x, \xi) + \dots$$

où λ_σ^k est homogène d'ordre k en ξ , et

$$\lambda_\sigma^1(x, \xi) = \sqrt{(1 + |\nabla\sigma(x)|^2)|\xi|^2 - (\nabla\sigma(x) \cdot \xi)^2}.$$

De plus, les symboles $\lambda_\sigma^0, \lambda_\sigma^{-1}, \dots$ sont définis par récurrence, de sorte que λ_σ^k ne dépend que des dérivées d'ordre $\leq |k| + 2$ de σ . Cette observation permet de définir λ_σ pour $\sigma \notin C^\infty$ de façon évidente, en ne considérant dans le développement (19) que les termes qui ont un sens. Plus précisément, pour $\sigma \in C^{k+2} \setminus C^{k+3}$ avec $k \in \mathbf{N}$, nous poserons

$$\lambda_\sigma = \lambda_\sigma^1 + \lambda_\sigma^0 + \dots + \lambda_\sigma^{-k}.$$

Un tel symbole appartient naturellement aux classes de symboles du calcul paradifférentiel de Bony.

Pour l'étude des problèmes avec surface libre qui nous intéressent, les fonctions ψ et σ ont la même régularité. Il faut donc comprendre toute la structure de $G(\sigma)$ en fonction de σ . C'est ce que donne le théorème suivant démontré dans [1].

Théorème 7. *Considérons un indice s assez grand. Si $\sigma \in H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ et $\psi \in H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$, alors*

$$(20) \quad G(\sigma)\psi = T_{\lambda_\sigma}(\psi - T_B\sigma) - T_V \cdot \nabla\sigma - T_{\text{div}V}\sigma + R(\sigma, \psi),$$

où le reste $R(\sigma, \psi)$ est deux fois plus régulier que les inconnues :

$$R(\sigma, \psi) \in H^{2s-K}(\mathbf{T}_\tau^2),$$

où K est un nombre qui ne dépend que de la dimension, et les coefficients B et V sont ceux qui interviennent dans la formule de Lannes (10).

L'approche paradifférentielle est inspirée par les travaux de Serge Alinhac sur les chocs et par ceux de David Lannes sur le problème de Cauchy pour les ondes de gravité. Un point clé de la démonstration consiste à faire apparaître l'inconnue $\psi - T_B\eta$ qui est appelée la bonne inconnue d'Alinhac dans la littérature.

9. Sous-ellipticité sous une hypothèse diophantienne

La contribution essentielle de Ioss et Plotnikov a été d'obtenir une majoration de l'inverse du symbole du linéarisé autour d'un état non trivial sous une condition diophantienne. Ce qui est l'étape cruciale pour prouver l'existence de diamond waves au moyen d'un schéma de Nash-Moser.

Les estimations de Ioss et Plotnikov sont des estimations avec perte d'une dérivée. Nous allons dans cette partie esquisser un raffinement de leur méthode qui permet d'avoir des estimations sans perte et donc de démontrer que leurs solutions sont en fait C^∞ (cf [1]). Un point intéressant est que nous ne ferons aucune hypothèse de petitesse sur les solutions.

Définition. Fixons $\tau > 0$ et notons par \mathbf{T}_τ^2 le tore $\mathbf{T}_\tau^2 = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \times (\mathbf{R}/\frac{2\pi}{\tau}\mathbf{Z})$.

i) Étant donné $\mu > 0$ et $s > 3$, $D_\mu^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ désigne l'ensemble des solutions (σ, ψ) du système (13) qui appartiennent à $H^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ et qui sont telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma(-x_1, x_2) = \sigma(x_1, -x_2), \\ \psi(x) &= -\psi(-x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2),\end{aligned}$$

et

$$(21) \quad 1 + (\partial_{x_1}\varphi)(x, \sigma(x)) \neq 0,$$

où φ est l'extension harmonique de ψ définie par (7)–(8).

ii) L'ensemble $D^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ des diamond waves de régularité H^s est l'ensemble de tous les triplets $\omega = (\mu, \sigma, \psi)$ tels que $(\sigma, \psi) \in D_\mu^s(\mathbf{T}_\tau^2)$.

Remarque. La condition (21) est une hypothèse naturelle qui signifie juste qu'une certaine vitesse ne s'annule pas. Notons qu'elle est automatiquement satisfaite pour des ondes de petite amplitude.

Nous allons construire deux fonctions ν, κ définies sur $D^{12}(\mathbf{T}_\tau^2)$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $s \geq 12$, si $\omega = (\mu, \sigma, \psi) \in D^s(\mathbf{T}_\tau^2)$ vérifie

$$(22) \quad |k_2 - (\nu(\omega)k_1^2 - \kappa(\omega))| \geq \frac{1}{k_1^2},$$

pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbf{N}^2$ avec k_1 assez grand, alors

$$(\sigma, \psi) \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_\tau^2).$$

Pour cela nous allons faire une réduction des équations à une équation scalaire à coefficients constants plus un reste arbitrairement régularisant.

Nous avons déjà paralinéarisé la première condition aux limites. Puisque la seconde est une expression non linéaire simple, il est beaucoup plus aisé de la paralinéariser. Le résultat intéressant est que ce calcul fait aussi intervenir la bonne inconnue $u = \psi - T_B\sigma$ qui apparaît dans la formule (20). On obtient ainsi un système de deux équations. Il sera plus commode pour la suite de travailler à partir de l'équation du second ordre que l'on obtient à partir de ce système. Au final on obtient le résultat suivant.

Proposition. Introduisons $V := c + \nabla\psi - B\nabla\sigma$, $\mathbf{a} := \mu + V \cdot \nabla B$, et posons

$$(23) \quad \mathcal{V}(x, \xi) := -\mathbf{a}(x)^{-1}(V(x) \cdot \xi)^2 + \operatorname{div}(\mathbf{a}(x)^{-1}(V(x) \cdot \xi)V(x)).$$

Alors,

$$u = \psi - T_B \eta$$

vérifie

$$T_{\lambda_{\sigma+V}} u \in H^{2s-5}(\mathbf{T}_\tau^2).$$

La notation \mathbf{a} est classique. Ce coefficient est appelé coefficient de Taylor dans la littérature. Le sens physique de \mathbf{a} est donné par l'identité suivante $\mathbf{a}(x) = -(\partial_y P)(x, \sigma(x))$, où $P = P(x, y)$ est la pression du fluide. Il y a alors une propriété physique, dont le sens est clair, et qui se démontre aisément. Cette propriété est que la dérivée normale de la pression dans le fluide évaluée sur la surface libre est strictement négative. Cela implique que

$$\mathbf{a} > 0.$$

(Cette propriété est due à Sijue Wu.) En particulier $\mathbf{a}(x)^{-1}$ est bien défini.

On a donc déjà trouvé le symbole du paralinéarisé. Introduisons le symbole

$$p(x, \xi) = \lambda_\sigma^1(x, \xi) + \mathcal{V}(x, \xi).$$

Nous cherchons un changement de variables qui conjugue l'équation à une équation plus simple. Cela revient à trouver un difféomorphisme χ tel que $p(x, {}^t\chi'(x)\xi)$ a une expression simple. Bien sûr nous devons trouver un difféomorphisme qui respecte la structure périodique. Etant donné un indice $r > 1$, nous dirons qu'un difféomorphisme $\chi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un $C^r(\mathbf{T}_\tau^2)$ -difféomorphisme si $\chi(x) - x \in C^r(\mathbf{T}_\tau^2)$.

Le point clé est que l'on peut redresser le champ de vecteurs tout en respectant la périodicité.

Proposition. Il existe un $C^{s-3}(\mathbf{T}_\tau^2)$ -difféomorphisme χ_1 de la forme

$$\chi_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ d(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

tel que d est solution de l'équation de transport

$$V_1 \partial_{x_1} d + V_2 \partial_{x_2} d = 0,$$

avec donnée initiale $d(0, x_2) = x_2$, et tel que,

$$d(x_1, x_2) = d(x_1 + 2\pi, x_2) = d(x_1, x_2 + 2\pi/\tau) - 2\pi/\tau.$$

En utilisant ensuite le fait que le symbole principal du Dirichlet–Neumann est la racine carrée d'un polynôme du second degré, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire. Il existe

- un difféomorphisme $\chi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tel que $\chi - \operatorname{id} \in C^{s-4}(\mathbf{T}_\tau^2)$,
- une constante $\nu \geq 0$,
- une fonction strictement positive $\gamma \in C^{s-4}(\mathbf{T}_\tau^2)$,
- un symbole $\alpha \in \Gamma_{s-4}^0(\mathbf{T}_\tau^2)$ homogène de degré 0 en ξ ,

tels que, pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{T}_\tau^2 \times \mathbf{R}^2$,

$$p(x, {}^t\chi'(x)\xi) = \gamma(x)(|\xi| - \nu\xi_1^2) + i\alpha(x, \xi)\xi_1.$$

Pour calculer l'action de ce changement de variables, on va utiliser les opérateurs de paracomposition d'Alinhac. Cela permet d'associer au $C^r(\mathbf{T}_\tau^2)$ -difféomorphisme χ^{-1} un opérateur $(\chi^{-1})^*$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad u \in H^\alpha(\mathbf{T}_\tau^2) \Leftrightarrow (\chi^{-1})^* u \in H^\alpha(\mathbf{T}_\tau^2).$$

Une propriété fondamentale de ces opérateurs est que l'on dispose d'un lemme de calcul symbolique pour calculer le commutateur d'un tel opérateur avec un opérateur paradifférentiel. Ce calcul symbolique entraîne que $U = (\chi^{-1})^* u$ vérifie :

$$(24) \quad \left(|D_x| + \nu\partial_{x_1}^2 + T_A\partial_{x_1} + T_B \right) U = f \in H^{s+2}(\mathbf{T}_\tau^2),$$

où $A, B \in \Gamma_{s-6}^0(\mathbf{T}_\tau^2)$ sont tels que A est homogène de degré 0 en ξ ; $B = B_0 + B_{-1}$ avec B_ℓ homogène de degré ℓ en ξ .

On peut maintenant éliminer les termes d'ordres inférieurs par une méthode de commutateurs. Le résultat est qu'il existe un opérateur Z de degré 0 (elliptique et à coefficients bi-périodiques) ainsi que deux constantes $\kappa, \kappa' \in \mathbf{R}$ tels que

$$Z \left(|D_x| + \nu\partial_{x_1}^2 + T_A\partial_{x_1} + T_B \right) U = \left(|D_x| + \nu\partial_{x_1}^2 + \kappa + \kappa'\partial_{x_1}^{-2} \right) ZU + f,$$

avec $f \in H^{s+2}(\mathbf{T}_\tau^2)$.

Nous avons donc démontré qu'il existe deux constantes $\kappa, \kappa' \in \mathbf{R}$ et un opérateur elliptique de degré 0 préservant la périodicité, tels que

$$(25) \quad \left(|D_x| + \nu\partial_{x_1}^2 + \kappa + \kappa'\partial_{x_1}^{-2} \right) ZU \in H^{s+2}(\mathbf{T}_\tau^2).$$

Sur ce qui joue le rôle de la variété caractéristique de l'équation, $|\xi|$ est approximativement égal à $\nu\xi_1^2$. Donc, si

$$\left| \sqrt{k_1^2 + \tau k_2^2} - \nu k_1^2 + \kappa \right| \geq \frac{1}{k_1^2},$$

pour tout $k \in \mathbf{N}^2$ avec k_1 assez grand, on obtient

$$ZU \in H^{s+1}(\mathbf{T}_\tau^2), \quad \partial_{x_1} ZU \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_\tau^2).$$

Si l'on revient à l'inconnue u , cela implique que $u \in H^{s+1}(\mathbf{T}_\tau^2)$ et $T_V \cdot \nabla u \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_\tau^2)$, et ensuite que

$$\psi, \sigma \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{T}_\tau^2).$$

Ainsi toute solution $(\psi, \sigma) \in H^s(\mathbf{T}_\tau^2)^2$ qui vérifie une certaine estimation diophantienne est en fait plus régulière. Comme la condition diophantienne ne dépend que d'un nombre fini de dérivées, par une récurrence immédiate on obtient que $(\psi, \sigma) \in H^{s+\frac{N}{2}}(\mathbf{T}_\tau^2)^2$ pour tout $N \in \mathbf{N}$. Ce qui prouve que $(\psi, \sigma) \in C^\infty(\mathbf{T}_\tau^2)^2$ en utilisant l'injection $H^{k+\rho}(\mathbf{T}_\tau^2) \subset C^k(\mathbf{T}_\tau^2)$ pour $\rho > 1$.

Il reste ensuite beaucoup de travail pour en déduire l'existence des solutions. Il faut en particulier construire des solutions approchées, calculer la valeur de ν pour ces solutions et vérifier que ν peut s'écrire sous la forme $\nu = \nu_c - \nu_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ avec $\nu_1 \neq 0$.

10. Références

- [1] Thomas Alazard et Guy Métivier. Paralinearization of the Dirichlet to Neumann operator, and regularity of three-dimensional water waves. *Comm. Partial Differential Equations*, 34(10-12) :1632–1704, 2009.
- [2] Klaus Beyer et Matthias Günther. On the Cauchy problem for a capillary drop. I. Irrotational motion. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(12) :1149–1183, 1998.
- [3] Jean-Michel Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.
- [4] Augustin Louis Cauchy. Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie p.5-318. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques. Tome I, imprimé par autorisation du Roi à l'Imprimerie royale; 1827. Disponible sur le site <http://mathdoc.emath.fr/>
- [5] Alex D. D. Craik. The origins of water wave theory. In *Annual review of fluid mechanics. Vol. 36*, volume 36 of *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 1–28. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 2004.
- [6] Étienne Ghys. Resonances and small divisors. In *Kolmogorov's heritage in mathematics*, pages 187–213. Springer, Berlin, 2007. Voir aussi une version en français sur la page internet d'Étienne Ghys.
- [7] Gérard Iooss. J. Boussinesq and the standing water waves problem. *C. R. Mécanique*, 335, 9-10, 584-589, 2007.
- [8] Gérard Iooss et Pavel I. Plotnikov. Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 200(940) :viii+128, 2009.
- [9] Gérard Iooss et Pavel I. Plotnikov. Asymmetrical tridimensional travelling gravity waves. Preprint 2009 (87p.)
- [10] Tullio Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math. Ann.*, 93(1) :264–314, 1925.
- [11] John F. Toland. Stokes waves. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 7(1) :1–48, 1996.
- [12] Sijue Wu. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2) :445–495, 1999.