A.N. 2008-09 - L3 Math.

Corrigé Succinct du TD 3

• Ex 1. a) $\{L_0, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n$ [$\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$]. En effet, si une combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j(x) \equiv 0$, alors pour $x = x_i$, ceci entraîne : $\alpha_i L_i(x_i) = \alpha_i = 0$, donc les α_i sont tous nuls : ce système est bien libre, donc est une base.

$\forall i, \forall j \neq i, L_i(x_j) = 0$, donc $L_i(x)$ est divisible par $(x - x_j)$, $\forall j \neq i$, donc par $\prod_{j\neq i} (x - x_j)$, puisque ces polynômes sont deux à deux premiers entre eux. Donc $L_i(x) = C \prod_{j \neq i} (x - x_j) = \prod_{\substack{j\neq i \\ 0 \leq j \leq n}} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$, car $L_i(x_i) = 1$

b) $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ répond à la question, et c'est la seule solution, car les L_i forment une base.

c) $p_n(x) = -\frac{3}{2} L_0(x) + \frac{1}{4} L_2(x)$, avec $\begin{cases} x_0 = -1 = -x_4, \\ x_1 = -\frac{1}{2} = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases}$

et $L_0(x) = \frac{(x+1/2)x(x-1/2)(x-1)}{(-1+1/2)(-1)(-1-1/2)(-1-1)}$, donc

$L_0(x) = \frac{x(x-1)(x^2 - 1/4)}{3/2}$, et de m. $L_2(x) = \frac{(x-1)(x-1/2)(x+1/2)(x+1)}{1/4}$

$\left[= \frac{(x^2-1)(x^2-1/4)}{4} \right.$.

d) Posons $\forall x, \forall t$

$q(t) = f(t) - p_n(t) - k(x) \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$, en supposant que $\forall i$, $x_i \neq x$. On choisit $k(x)$ tq $q(t)\big|_{t=x} = 0$. Alors q admet $(n+2)$ zéros distincts : $x_0, \dots x_n$ et x. En appliquant le thm de Rolle n fois, on en déduit qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tq $q^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi)}_{0} - k(x) \cdot (n+1)! = 0$, d'où le résultat.

e) Laissée en exercice

Ex. 2 :

a) On fait tout de suite la démonstration générale. Pour $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distincts et $f \in C^1([a,b])$, on cherche $p_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}$ tq $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, on a : $p_{2n+1}(x_i) = f(x_i)$ et $p'_{2n+1}(x) = f'(x_i)$.

On cherche donc $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ des polynômes A_i et B_i tels que
$$\begin{cases} \forall j \neq i,\ A_i(x_j) = B_i(x_j) = 0, \text{ et} \\ A_i(x_i) = 1,\ A'_i(x_i) = 0, \text{ et} \\ B_i(x_i) = 0,\ B'_i(x_i) = \end{cases}$$
Si on a trouvé les $(2n+2)$ polynômes A_i et B_i, ils forment une base, car si une combinaison linéaire $q(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i A_i(x) + \beta_i B_i(x)) \equiv 0$, alors $\forall i = 0..n$, $q(x_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, et $q'(x_i) = 0$, donc $\beta_i = 0$, donc ces $(2n+2)$ vecteurs sont linéairement indépendants dans $\mathcal{P}_{2n+1}$, avec $\dim(\mathcal{P}_{2n+1}) = 2n+2$, donc forment une base.

b) On raisonne comme à l'exercice 1
$q(t) = f(t) - p_{2n+1}(t) - \left(\prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2\right) k(x) = 0$ pour $t = x_0, x_1, \ldots, x_n$ (zéros doubles) et pour $t = x$, si on a choisi ainsi $k(x)$. D'après le thm de Rolle, q' s'annule $(2n+2)$ fois, i.e pour $t = x_0, \ldots, x_n$ et une fois au moins sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$, ou $]x_i, x[$ et $]x, x_{i+1}[$ si $x_i < x < x_{i+1}$. On conclut comme à l'exercice 1.

c) Décrivons les polynômes A_i et B_i dans le cas général. Par exemple $B_i(x)$ est divisible par $(x - x_j)^2$ $\forall j \neq i$, et par $(x - x_i)$, donc, cf exercice 1,

$\boxed{B_i(x) = C\left(\prod_{j\neq i}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2\right)\cdot(x-x_i) = (x-x_i)\,L_i^2(x)\cdot C.}$ On

$B_i'(x_i) = 1$, d'où $\left((x_i-x_i)\cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i) + 1\cdot L_i^2(x_i)\right)\cdot C = 1$,
donc $\boxed{C=1}$. Quant à $A_i(x)$, on le cherche sous la forme :

$A_i(x) = \left(L_i(x)\right)^2\left(a(x-x_i)+b\right)$.

Alors $A_i(x_i) = 1$ entraîne $1\cdot b = 1$, donc $b=1$,
et $A_i'(x)\big|_{x=x_i} = 2\,L_i(x_i)\,L_i'(x_i)\left(a\cancel{(x_i-x_i)}+b\right)$
$+\left(L_i(x_i)\right)^2\cdot a = 2\,L_i'(x_i)\cdot 1 + a = 0$,
donc $\boxed{A_i(x) = \left(L_i(x)\right)^2\left(1-2\,L_i'(x_i)\right)}$

d) Pour $n=2$, on obtient $L_1(x) = \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)$; $L_2(x) = \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)$

$B_1(x) = (x-x_1)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2$; $A_1(x) = \left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)^2\left(1-2\cdot\underbrace{\frac{1}{x_1-x_2}}_{L_1'(x_1)}\right)$

et de même pour A_2 et B_2.