

TP Analyse Numérique - Sujets n° 1, 2, 3
Résolution de systèmes linéaires: méthodes itératives.

- 1) On considère le système $Ax=b$; où $A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de taille $n \times n$, et $\alpha \geq 0$. Résoudre ce système par l'Algorithme de Gauss-Seidel (TP n° 1), ou de Jacobi (TP n° 2) ou de relaxation, de paramètre ω (TP n° 3).
- 2) Dans le cas que vous étudiez, mettre le système sous la forme classique $Mx = Nx + b$, avec $A = M - N$, en précisant M et N en fonction de $A = D - L - U$, où D est diagonale, L ou U triangulaires inférieure ou supérieure. Expliquez ensuite comment on résout à chaque étape le système $Mx^{k+1} = Nx^k + b$ sans inverser la matrice M .
- 3) On rappelle que A est symétrique définie-positive et donc que ces 3 méthodes convergent ($\forall \omega \in]0, 2[$ pour la méthode de relaxation^(*)).
- 4) Ecrire le programme Scilab correspondant.
- 5) Tester ce programme ... A discuter en TD-TP.

(*) La méthode de relaxation $\mathcal{L}_\omega$ correspond à $\mathcal{L}_\omega = M^{-1}N$, où $M = \frac{1}{\omega}D - L$ et $U = (\frac{1}{\omega} - 1)D + U$, $0 < \omega < 2$.

TP Analyse numérique - Sujet n° 4 -
Résolution de systèmes linéaires: Gauss.

1) On considère le système linéaire $Ax=b$, où $A = \begin{pmatrix} \ell+\alpha & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & \ell+\alpha \end{pmatrix}$ est de taille $n \times n$, et $\alpha \geq 0$. On admettra qu'on peut résoudre ce système par la méthode de Gauss sans permutation de lignes ou de colonnes.

Plus précisément ici, on demande de montrer qu'on peut résoudre $Ax=b$ en le transformant en

$Cx=d$, où

$$C = \begin{pmatrix} c_1 - c_0 & & & 0 \\ & c_2 - c_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n - c_{n-2} \end{pmatrix} \text{ et } d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix},$$

avec $\begin{cases} c_0 = 1, c_1 = \ell + \alpha, \\ c_{k+1} = (\ell + \alpha)c_k - c_{k-1}, k = 1 \dots n-1, \end{cases}$

et $\begin{cases} d_1 = b_1, \\ d_{k+1} = b_{k+1}c_k + d_k, k = 1 \dots n-1, \end{cases}$ où

par rapport à l'algorithme de Gauss habituel, on ne divise pas à chaque étape k par le pivot $a_{k,k}^{(k)}$.

3) Écrire l'algorithme ScLab correspondant (*).

4) Compter le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer cette triangularisation et résoudre le système linéaire $Cx=d$. Comparer avec le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le produit Ax . Conclusions... A détailler en TD-TP.

TP Analyse numérique - Sujet n°5
Méthode de la puissance itérée pour calculer
le rayon spectral d'une matrice.

1) Soit A une matrice carrée $n \times n$. On suppose que $\forall i, a_{ii} \neq 0$ et on note $J_\alpha = I - D^{-1}A_\alpha$. Calculer J_α pour $A_\alpha = \begin{pmatrix} \ell + \alpha & -1 & & 0 \\ -1 & & \ddots & \\ 0 & & -1 & \ell + \alpha \end{pmatrix}$. Montrer que J_α a toutes

ses valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ (on admettra que les λ_i sont toutes distinctes).

2) On veut seulement calculer $\rho(J) = \max_{i=1..n} |\lambda_i|$ par la méthode suivante :

$\begin{cases} x^0 \text{ donné quelq;} \\ x^{k+1} = \frac{Jx^k}{\|Jx^k\|}, k = 0, 1, \dots, p, \dots \end{cases}$
 méthode de la puissance itérée.

3) Ecrire un programme Scilab correspondant à cet Algorithme, et donner une approximation de λ_n et "du" vecteur propre associé.

4) Comparer avec la valeur exacte : pour $\alpha = 0$, les valeurs propres de A sont $\lambda_k = 1 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$. En déduire les valeurs propres de A_α , puis celles de J_α et finalement J_α . Vérifier qu'en particulier $\rho(J_\alpha) = \lambda_n = |\lambda_n| > |\lambda_{n-1}| > \dots > |\lambda_1|$.

5) Dans la méthode de surrelaxation $\mathcal{L}_\omega$, cf. sujet n°3 le rayon spectral $\rho(\mathcal{L}_\omega) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J_\alpha))^2}} = |\omega_0 - 1|$ correspond au choix optimal ω_0 du paramètre ω ... A détailler en TD-TP

TP Analyse numérique - sujets n° 6 à 8.

Résolution approchée de systèmes d'ODE.

1) On considère un système de deux ODE :

$$(1) \quad u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} f_1(t, u_1, u_2) \\ f_2(t, u_1, u_2) \end{pmatrix},$$

avec une condition initiale

$$(2) \quad u(0) = u_0 = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{pmatrix}.$$

On suppose le système (1) autonome : $f(t, u) = f(u) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$. Ecrire un programme Scilab de résolution numérique du problème (1)(2), et de tracer des trajectoires dans le plan (u_1, u_2) (portrait de phase), et dans les plans (t, u_1) , (t, u_2) ou en 3D (t, u_1, u_2) ... (à détailler en TD-TP), dans l'un des cas suivants :

a) sujet n° 6 : le pendule :

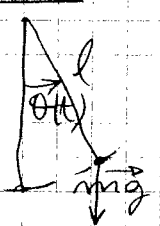
$$m l \ddot{\theta} + m g \sin \theta = 0 \quad m, g, l : \text{ctes positives.}$$

Poser $X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$, vérifier qu'on obtient le

$$\text{système} \quad (3) \quad \begin{cases} \dot{X}_1(t) = X_2(t) := F_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin X_1(t) := F_2(X_1, X_2) \end{cases}$$

avec la condition initiale :

$$(4) \quad X(0) = X_0 := \begin{pmatrix} X_{1,0} \\ X_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{pmatrix}$$



b) Sujet n° 7 : le pendule linéarisé : en supposant $|\theta| \ll 1$,

$$\text{on remplace (3) par} \quad (5) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -\frac{g}{l} X_1 \end{cases}, \quad \text{avec encore} \quad \begin{cases} X_1 = \theta \\ X_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Montrer que la quantité $E(t) = \frac{1}{2} m l \dot{\theta}(t)^2 + m g l (1 - \cos \theta)$ est une quantité invariante [= une intégrale première] du système (3) et sa version linéarisée $E_l(t) = \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 + m g l \frac{\theta^2}{2}$ une intégrale première du système linéarisé (5).

Montrer dans ce cas que la solution générale de (5) est

... de la forme $\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi) \dots$

A détailler en TD-TP

c) Sujet n° 8: mêmes questions avec le modèle de Lotka-Volterra en biologie (= de Goodwin en économie):

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = axy - bx, \\ \dot{y} = -cxy + dy, \quad a, b, c, d > 0. \end{cases}$$

Laquelle des deux inconnues $(x(t), y(t))$ représente-t-elle la population de prédateurs(?), de proies(?)

En posant $u = \ln x$, $v = \ln y$, montrer que la fonction $H(u, v) = a e^v + c e^u - b v + d u := \tilde{H}(x, y)$ est un "Hamiltonien" pour le système (6'), déduit de (6):

(6') $\begin{cases} \dot{u} = ay - b, \\ \dot{v} = -cu + d, \end{cases}$ i.e. que (6') se réécrit:
$$(7) \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial v}(u, v), \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u}(u, v). \end{cases}$$

Essayez de retrouver numériquement... (à détailler en TD-TP) le fait que les trajectoires de (6) sont les courbes fermées $\{(x, y); \tilde{H}(x, y) = 0\}$, décrites de manière périodique en temps...

TP Analyse numérique - Sujets n° 9 à 12
Résolution explicite ou implicite d'ODE.

1 - On considère une ODE autonome

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t))$$

avec une C.I. (2) $x(0) = x_0$.

2 - Faire un programme Scilab calculant la solution numérique de (1) (2) par le schéma explicite ou implicite et traçant le graphe de la solution en fonction du temps, dans les cas suivants:

A) Sujet n° 9: schéma explicite: étudier successivement les cas

A1) $f(x) = x(1-x)$, discuter suivant que $x_0 > 0$, $0 < x_0 < 1$ ou $x_0 > 1$: quels sont les points d'équilibre, et quelle est leur stabilité

et A2) $f(x) = x^4$, discuter suivant que $x_0 > 0$ ou < 0 ...

B) Sujet n° 10: schéma implicite: en utilisant un algorithme de résolution d'une équation $g(x) = 0$ étudiée en cours - TD, étudier l'équation (1) avec $f(x) = x(1-x)$

C) Sujet n° 11: idem, schéma implicite, avec $f(x) = x^3$ et $f(x) = -x^3$.

D) En ramenant l'étude d'une équation du second ordre: $\ddot{x}(t) = f(x(t), \dot{x}(t))$ (3)

à un système du premier ordre comme dans les sujets (6) à (8), résoudre numériquement l'équation

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k^2x = 0 \quad (4)$$

par le schéma explicite: Sujet n° 12, ou par le schéma d'Euler implicite: système linéaire ex 2 à résoudre, Sujet n° 13... A détailler en TD-TP