

EXERCICE 22

Un groupe industriel possède deux filiales MAT et MATIC qui produisent des petits moteurs destinés au montage de jouets.

– Partie I –

La variable aléatoire X qui, à chaque moteur tiré au hasard dans la production, associe sa durée de vie moyenne exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 400 et d'écart type 40.

- Un moteur est déclaré non commercialisable si sa durée de vie est inférieure à 318 heures. Calculer, à 10^{-2} près la probabilité p qu'un moteur prélevé au hasard dans la production ne soit pas commercialisable.
- On admet que $p = 0,02$. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 moteurs, associe le nombre de moteurs non commercialisables. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler le prélèvement de 50 moteurs à un prélèvement aléatoire avec remise.
 - Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier la réponse et donner ses paramètres.
 - Calculer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement : « il y a au plus trois moteurs non commercialisables ».

– Partie II –

La filiale MAT prélève un échantillon de taille 100 sur la production d'un jour et mesure la durée de vie, en heures, des moteurs. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée de vie	[300,340[[340,380[[380,420[[420,460[[460,500[
effectifs	7	21	48	16	8

1. En faisant l'hypothèse que les valeurs mesurées sont celles du centre de classe, calculer, à 10^{-2} près, la moyenne m_1 et l'écart type σ_1 de cette série statistique.

La filiale MATIC, dans des conditions similaires, contrôle un échantillon de taille 100 et obtient pour résultats $m_2 = 406,8$ et $\sigma_2 = 40,5$.

2. On désigne par \bar{X}_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MAT, associe sa moyenne, et par \bar{X}_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 moteurs prélevés au hasard par la filiale MATIC, associe sa moyenne.

Tous les échantillons considérés sont assimilés à des échantillons prélevés avec remise.

On suppose que les variables aléatoires $\bar{X}_1, \bar{X}_2, D = \bar{X}_1 - \bar{X}_2$ suivent des lois normales de moyennes respectives $M_1, M_2, M_1 - M_2$ inconnues, et on estime l'écart type de D par

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{100}}$$

(On prend comme valeur approchée à 10^{-1} près de σ_1 la valeur 39,4.)

On décide de construire un test bilatéral permettant de savoir s'il existe une différence significative au seuil de 5% entre les durées de vie des moteurs fabriqués par les filiales MAT et MATIC.

On choisit pour hypothèse $H_0 : M_1 = M_2$, et pour hypothèse alternative $H_1 : M_1 \neq M_2$.

- Sous l'hypothèse H_0 , D suit la loi normale $N(0, \sigma_D)$. Déterminer l'intervalle $[-h, h]$ tel que $P(-h \leq D \leq h) = 0,95$.
- Énoncer la règle de décision du test.
- Utiliser ce test avec les deux échantillons de l'énoncé et conclure.