Master 2 Enseignement
T. Champion & S. Junca

Lois discrètes et séries génératrices

1 Propriétés de $G_X(t) = E\left(t^X\right)$ où $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $G_X(.)$ est bien définie et continue pour tout $t \in [-1, 1]$.
2. Montrer que $G_X \in C^\infty(]-1, +1[)$.
3. Vérifier que $G_X(.)$ est croissante et convexe sur $[0, 1[$.
4. Montrer que $E(X) = G'_X(1) \in [0, +\infty]$.
   On montrera que X admet une espérance si et seulement si $G_X(.)$ est dérivable (au moins à gauche) en $x = 1$. Si X n'admet pas d'espérance on justifiera la convention $E(X) = +\infty = G'_X(1)$.
5. Si X admet une variance, montrer que $E(X^2) = G''_X(1) + E(X)$.
   Dans cas exprimer la variance en fonction de $G'_X(1), G''_X(1)$
6. Exemples : Calculer $G_X(.)$, $E(X)$ et $Var(X)$ pour
   (a) la loi binômiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,
   (b) la loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,
   (c) la loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$, $X \geq 1$.

2 $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$

1. Montrer que $G_X(.)$ caractérise la loi de X, i.e. : $X \sim Y$ si et seulement si $G_X \equiv G_Y$.
2. Si X et Y sont indépendantes et $S := X + Y$, montrer que $G_S = G_X G_Y$.
   En déduire la loi de la somme S dans les cas suivants :
   (a) $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$
   (b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

3 Enlever les boules rouges

Un sac contient une boule blanche et deux rouges. On répète une infinité de fois l'opération qui consiste à tirer une boule, la remettre dans le sac si elle est blanche, l'éliminer si elle est rouge. On appelle X_n la variable aléatoire prenant la valeur 0 ou 1 suivant qu'au $n^{\text{ème}}$ tirage on a tiré une boule rouge ou blanche et l'on pose :
$R_n = \{X_n = 0\}$ et $B_n = \{X_n = 1\}$.

1. Soit T_1 l'instant où l'on a tiré la première boule rouge (T_1 est ainsi le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $X_n = 0$). Calculer $P(T_1 = m)$ $(m \geq 1)$ et G_{T_1}. En déduire que T_1 est fini avec une probabilité égale à 1, puis calculer $E(T_1)$ et $Var(T_1)$.
2. Soit T_2 l'instant où l'on a tiré la deuxième boule rouge.
   Calculer $P(T_1 = m, T_2 = n)$ pour $1 \leq m < n$.
3. En déduire $P(T_2 = n)$. Calculer G_{T_2}.
   Montrer que presque sûrement T_2 est fini, puis calculer $E(T_2)$ et $Var(T_2)$.
4. En déduire $P(R_n)$ et la loi de X_n.

4 Le cueilleur de champignons

On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur durant une période fixée. On suppose que N est une variable aléatoire dans $\{1, 2, \cdots\}$. On suppose, de plus, que la probabilité pour qu'un champignon cueilli soit comestible est p. En faisant les hypothèses d'indépendance qui vont de soi, calculer la probabilité que tous les champignons ramassés soient comestibles en fonction de $G_N(t) = E(t^N)$ et de p.

5 Somme aléatoire de variables aléatoires

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de même loi que X, et N une v.a. indépendantes de la suite (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N} - \{0\}$. On définit $Z(\omega) := \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. On note $G_X(t) = E(t^X)$.

1. Montrer que $G_Z = G_N o G_X$.
2. Exprimer $E(Z)$ et $Var(Z)$ en fonction de $E(N)$,$Var(N)$, $E(X)$ et $Var(X)$.
3. Le nombre d'accidents en une semaine dans une usine est une v.a. de moyenne μ et de variance σ^2. Le nombre d'individus blessés dans un accident est une v.a. de moyenne ν et de variance τ^2. Les nombres d'individus blessés dans des accidents différents sont indépendants entre eux et indépendants du nombre d'accidents.

   Donner la moyenne et la variance du nombres d'individus blessés dans une semaine.

6 Processus de branchement

On étudie la transmission du nom X porté à l'origine par un seul homme. Cet homme forme la génération 0. Les descendants mâles directs de la n-ième génération forment la $(n + 1)$-ième génération et la probabilité p_k qu'un homme ait k fils ($k = 0, 1, \cdots$) est constante au cours des générations. On suppose $0 < p_0 < 1$. Soit Z_n le nombre d'hommes portant le nom X à la n-ième génération. On pose $x_n = P(Z_n = 0)$, $G(t) = E(t^{Z_1})$.

1. Montrer que G est strictement croissante sur $[0, 1]$, qu'elle est convexe sur $]0, 1[$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $G" > 0$ sur $]0, 1[$.
3. En déduire que l'équation $G(x) = x$ admet exactement une ou deux racines sur $[0, 1]$ suivant que $m := G'(1) \leq 1$ ou > 1.
4. Démontrer la relation de récurrence $G_{n+1} = G_n o G$ où $G_n(t) = E(t^{Z_n})$.
5. Vérifier que $x_{n+1} = G(x_n)$,$n \geq 1$, $x_1 = p_0$, puis étudier la monotonie de cette suite.
6. Discuter sur la valeur de $\lim x_n$ en fonction de $m = E(Z_1)$.
7. Calculer $E(Z_n)$ et conclure sur le problème d'extinction du nom X.
8. Si $Z_0 = k > 1$ (au lieu de $Z_0 = 1$ précedemment) calculer $E(Z_n)$ et la $\lim P(Z_n = 0)$.

7 Corrigé succinct :

7.1 Propriétés de $G_X(t) = E(t^X)$ où $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

1. Lemme d'Abel
2. Dériver
3. Abel
4. Si X admet une variance alors il admet une espérance : $L^2(\mathbb{N}) \subset L^1(\mathbb{N})$
5. Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $p+q=1$ $G_X(t) = (q+pt)^n$, $E(X) = np$ et $Var(X) = npq$
   Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = \exp(\lambda(t-1)$, $E(X) = \lambda$ et $Var(X) = \lambda$.
   Géométrique : $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$,,$E(X) = 1/p$.

7.2 $S \sim \mathcal{B}(n+m,p)$, ou $S \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

7.3 Enlever les boules rouges [3] 8p. 108, sol p.270

1. $P(T_1 = m) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-1} \dfrac{2}{3}$, $m \geq 1$
   $G_{T_1}(s) = \dfrac{2s}{3-s}$.
   T_1 est fini avec une probabilité égale à $G_{T_1}(1) = 1$, $E(T_1) = \frac{3}{2}$, $Var(T_1) = \frac{3}{4}$.
2. $P(T_1 = m, T_2 = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m-1} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{m}$ pour $1 \leq m < n$.
3. $P(T_2 = n) = 2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$, $G_{T_2}(s) = \dfrac{2s^2}{6-5s+s^2}$, $E(T_2) = \frac{7}{2}$, $Var(T_2) = \frac{11}{4}$.
4. $P(R_n) = P(T_1 = n) + P(T_2 = n) = 4\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right]$, $n \geq 1$. $X_n \sim \mathcal{B}(1-P(R_n))$.

7.4 Le cueilleur de champignons [3] 20 p. 20 : G(p)

$C_k \sim \mathcal{B}(p)$, $C_k = 1$ si le champignon numéro k est comestible. Les C_k sont supposés indépendants.

A : tous les champignons ramassés sont comestibles
$A = \{C_1 = 1, \cdots, C_N = 1\} = \cup_{n \geq 1}(\{N = n\} \& \{C_1 = 1, \cdots, C_n = 1\})$
$P(A) = \sum_{n \geq 1} P(N = n)p^n = G(p)$.

7.5 Somme aléatoire de variables aléatoires

[1] 3.4 p.69

1. Série entière de rayon ≥ 1. Remarquer que $G_X(1) = 1$
2. même dérivées et série de Taylor.
3. Car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

4. $E(X) = G'(1) \in [0, +\infty]$, théorème d'Abel radial même si $G'(1) = +\infty$, cas positif. De même $E(X(X-1)) = G"(1)$, et les dérivées en 1 sont à gauche.
5. Indépendance
6. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $G_{S_n} = G_X^n$.

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_k P(Z=k)t^k = \sum_k \sum_n P(N=n \,\&\, S_n=k)t^k \\ &= \sum_k \sum_n P(N=n)P(S_n=k)t^k = \sum_n P(N=n)\left(\sum_k P(S_n=k)t^k\right) \\ &= \sum_n P(N=n)G_{S_n}(t) = \sum_n P(N=n)G_X^n(t) = G_N(G_X(t)). \end{aligned}$$

7. $E(N) = \mu$,$Var(N) = \sigma^2$, $E(X) = \nu$ et $Var(X) = \tau^2$.
$E(Z) = \mu\nu$ car $G'_Z(1) = G'_N(1)G'_X(1)$.
$Var(Z) = \sigma^2\nu^2 + \mu\tau^2$ car :
$G"_Z(1) = E(Z^2) - \mu\nu = G"_N(1)G'_X(1)^2 + G"_X(1)G'_N(1)^2 = (\sigma^2+\mu^2-\mu)\nu^2 + \mu(\tau^2 + \nu^2 - \nu)$. Comme $E(N^2) = \sigma^2 + \mu^2$ et $E(X^2) = \tau^2 + \nu^2$, $E(Z^2) = (\sigma^2+\mu^2)\nu^2 + \mu\tau^2$.

7.6 Processus de branchement

[1]

1. $G(t) = \sum_{k^g eq0} p_k t^k$, G' et $G'' \geq 0$.
2. $p_0 + p_1 < 1$ i.e. un $p_k > 0$ pour $k \geq 2$.
3. convecité
4. Somme aléatoire de v.a. $T_i \sim Z_1$: le nombre d'enfant de l'individu numéro i portant le non X. $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} T_i$, d'où $G_{n+1} = G_n o G$.
5. $p_0 < x_{n+1} = G(x_n)$,$n \geq 1$, est croissante et majorée par 1.
6. $\lim x_n = 1$ si $m \geq 1$, $\lim x_n = \alpha$ si $m > 1$, $p_0 < G(\alpha) = \alpha < 1$.
7. $E(Z_n) = G'_n(1) = G'(1)^n = m^n$ car $G(1) = 1$.
8. Si $Z_0 = k$, remplaçons W par Z pour ne pas confondre.
$W_n = Z_n^1 + \cdots + Z_n^k$, d'où $E(W_n) = kE(Z_n)$
$G_{W_n} = [G_n]^k$ donc la limite et 1 ou α^k.

Références

[1] Exercices de probabilités, Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel, Thierry Meyre

[2] Feller, An introdution to Probability, Vol I, p.270

[3] Foata & Fuchs, Calcul des probabilités,(1196)

[4] Lessigne, Pile ou Face.