Indications pour la feuille « variables aléatoires continues »

I) Loi uniforme

1. $F_Y(y)=0$ si $y<0;\ \frac{4}{5}\sqrt{y}$ si $0\le y;\ \frac{2}{5}(\sqrt{y}+1)$ si $1\le y\le 9/4;\ 1$ si $y>\frac{9}{4}$
2. $D_k(X)\sim U(\{0,1,\dots,9\})$ sont indépendantes.
3. a) $G_Y(y)=1-F_Y(y)=P(Y>y)=\left(1-\frac{y}{n}\right)^k,\ 0\le y\le n$

   b) $F_Z(z)=\left(\frac{z}{n}\right)^k,\ 0\le z\le n$

   $n=1,\ \phi(a)=P(Y\le a\le Z)=P(Y\le a\,'-'\,Z<a)=P(Y\le a)-P(Z<a)$

   car $P(A\,'-'\,B)=P(A)-P(B)$ si $B\subset A$

   c) $\phi(a)=F_Y(a)-G_Z(a)=1-(1-a)^k-a^k,\ \phi(0)=0=\phi(1),$

   $$max\,\phi=\phi(0.5)=1-\frac{1}{2^{k-1}}$$

   Faire un dessin dans la « lentille ».
4. $\alpha\neq 0$
5. a) (1) a > 0 : $G(y)=F\left(\frac{y-b}{a}\right)$; a = 0 : G(y) = 0 si y < b et 1 sinon

   a <0 : $G(y)=1-F\left(\frac{y-b}{a}\right)$

   (2) n >0 : n impair $G(y)=F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)$,

   n pair $Y\ge 0,$ pour $y\ge 0, G(y)=F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)-F\left(-y^{\frac{1}{n}}\right)$

   n=0 : Y=1 presque sûrement

   n < 0: n impair $G(y)=F(0)-F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)$ si $y<0,\ F(0)+1-F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)$ si $y>0,$

   et G est continue en 0: $G(0)=F(0)$.

   n pair $Y>0,$ pour $y>0, G(y)=1-F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)+F\left(-y^{\frac{1}{n}}\right)$

   (3) G est en escalier seulement discontinue sur les entiers: G(n)= F(n).

   (4) Y > 0, pour y > 0, G(y) = F(ln(y))

   (5) L'univers image de Y est contenu dans $\phi(X(\Omega))$.

   Soit $I=\phi(\mathbb{R})$, pour y dans I, $G(y)=F(\phi^{(-1)}(y))$

   b) (1) $a\neq 0$: $g(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$; a = 0 : Non

   (2) n >0 : n impair $g(y)=\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}f\left(y^{\frac{1}{n}}\right),\ y\neq 0$,

   n pair $Y\ge 0,$ pour $y>0, g(y)=\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}f\left(y^{\frac{1}{n}}\right)+\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}f\left(-y^{\frac{1}{n}}\right)$

   n=0 : Non

n < 0: n impair $g(y)=-\dfrac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n} f\left(y^{\frac{1}{n}}\right)$

n pair $Y>0$, pour $y>0, g(y)=-\dfrac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n} F\left(y^{\frac{1}{n}}\right)-\dfrac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n} f\left(-y^{\frac{1}{n}}\right)$

(3) Non

(4) Y > 0, pour y > 0, G(y) = f(ln(y)) /y

(5) Pour y dans $I=\phi(\mathbb{R})$,

$g(y)=\dfrac{f(z)}{\phi'(z)}$, avec $z=\phi^{(-1)}(y)$ quand $\phi'(z)\neq 0$ comme la fonction est strictement monotone les zéros de sa dérivée forme un ensemble négligeable.

6. On cherche la « médiane »:

(a) cas F continue $\dfrac{1}{2}\leq F(m)$ et $1-F(m)\geq\dfrac{1}{2}$ i.e $F(m)=\dfrac{1}{2}$,

unicité si cette équation admet une unique solution .

par exemple si F est strictement croissante

ou si F est dérivable en m et F'(m) > 0

(b) Cas général: F est continue à droite

l'ensemble des x tels que $\dfrac{1}{2}\leq P(X\leq x)$ est de la forme $[m_0,+\infty[$

Soit y tel que $\dfrac{1}{2}\leq P(X\geq y)=1-P(X<y)$, ie $P(X<y)\leq\dfrac{1}{2}$

Par continuité à gauche, c'est un ensemble de la forme $]-\infty, m_1]$

Finalement $m\in[m_{0,}m_1]$

qui en pratique (loi discrète) est rarement réduit à un seul point.

II) Loi exponentielle

1) a) F(t)=P(T <t) est la probabilité que l'atome « meure » avant l'instant t.

b) L'hypothèse de non vieillissement de l'atome s'écrit:

$P_{T>t}(T>t')=P(T>t'-t)$ ce qui revient à une éqquation fonctionnelle sur G=1-F.

c) Si T est une v.a. Continue, G l'est aussi et les solutions de l'équation fonctionnelle sont des exponentielles. Comme G(0)= 1 et G → 0 à l'infini on trouve que G est une exponentielle décroissante.

d) $f(t)=0$ si $t<0; f(t)=\lambda\exp(-\lambda t)$ si $t>0; E(T)=\dfrac{1}{\lambda}; Var(T)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

e) $P(T>E(T))=G(1/\lambda)=\dfrac{1}{e}\approx 0.37$

f) $P(T>2E(T))=G(2/\lambda)=\dfrac{1}{e^2}\approx 0.14$

g) $\tau=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $\ln 2\approx 0.69$

2)

a) $P(T>E(T))=G(1/\lambda)=\dfrac{1}{e}\approx 0.37$

b) $p_\lambda(t)=P(t<T<2\text{t})=e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t}$, $p_\lambda'(t)=\lambda e^{-\lambda t}(2e^{-\lambda t}-1)$,

maximum en τ, $p_\lambda(\tau)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

III) Loi de Cauchy $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $F(x)=\dfrac{\arctan(x)}{\pi}+\dfrac{1}{2}$

a) Pas d'espérance ni de variance

b) Y=1/X est encore une loi de Cauchy.

Calculer la fonction de répartition de Y et utiliser: $\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

c) * $F_Z(z)=\dfrac{2}{\pi}\arctan(e^z)$, $f_Z(z)=\dfrac{2e^z}{\pi(1+e^{2z})}=\dfrac{2}{\pi(e^{-z}+e^z)}=\dfrac{1}{\pi\cosh(z)}$

* Par parité de la densité :loi symétrique (ou Z ~ - Z de X ~ 1/X), E(Z)=0.

* L'identité provient de la série géométrique (l'une des plus belles formules) .

* $E(Z^2)=\int_{\mathbb{R}}(\ln|x|)^2 f_X(x)dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\dfrac{(\ln(x))^2}{1+x^2}dx$ formule de transfert

Par changement de variable y=1/x on a

$$Var(Z)=E(Z^2)=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{\ln^2(x)}{1+x^2}dx=\frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}>0$$

Car, après 2 intégrations par parties on a:

$$\int_0^1 x^{2n}\ln^2(x)dx=\frac{2}{(2n+1)^3}$$

IV) Loi Normale

1) Numérique avec Scilab

→ deff('y=f(x)','y=exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)')

→ deff('y=ERF(x)','y=intg(0,x,f)')

ERF(1)*2 = 0.6826895 ; ERF(2)*2= 0.9544997 (intervalle de confiance)

Pour $z > 0$, 2 F(-z) + 2 ERF(z) = 1, i.e. P(Z>z) = F(-z) = 0.5 – ERF(z)

on cherche z1 <0 tel que F(z1)= 0.1736, i.e. ERF(|z1|)= 0.3264

```
-->deff('y=F1(x)','y=ERF(x)-0.3264')

-->fsolve(0,F1)
 ans  =

    0.9400342
```

z1= -0.9400...

on cherche z2 > 0 tel que P(X>z2)= 0.1446, i.e. ERF(z2)= 0.3264

```
-->0.5 -0.1446
 ans  =

   0.3554

-->deff('y=F2(x)','y=ERF(x)-0.3554')

-->fsolve(0,F2)
 ans  =
```

1.0598782

z2=1.0598....

$$P(X<10)=P\left(Z<\frac{10-\mu}{\sigma}\right)=p_1=0.1446,\ \text{i.e.}\ \frac{10-\mu}{\sigma}=z1,\ \text{de même}\ \frac{13-\mu}{\sigma}=z2$$

$$\sigma=\frac{3}{z2-z1}\approx 1.5000657\ \text{ et }\ \mu=13-z2\,\sigma\approx 11.410113$$

Finalement on prendra $\mu=11.41$ et $\sigma=1.5$ en mm

2) Attention aux unités. Je suppose qu'il y une faute de frappe sinon il est évident que la probabilités est quasiment nulle hors de l'intervalle de qualité.

On suppose que toute les données sont en cm.

$\mu=0.25\ cm,\quad \sigma=0.02\ cm,$ l'intervalle de qualité $[0.20, 0.28]$

Soit Z la centrée réduite associée à X, on cherche P(Z hors de [-2.5,1.5])

```
intg(-2.5,1.5,f)
ans  =

   0.9269831

-->1 -intg(-2.5,1.5,f)
ans  =

   0.0730169
```

Cela donne environ 7% de mauvaises vis