Factorisation pour résoudre $AX = B$, $A \in GL_N(\mathbb{R}), B, X \in \mathbb{R}^N$.

1 $PA = LU$

Cette factorisation résulte de la méthode d'élimination de Gauss. En effet, il existe une matrice de permuation P, une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité telles que: $PA = LU$.
Si de plus, la matrice est *régulière* i.e: $\det[A_{ij}]_{1\leq i,j\leq k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, \cdots, N$, alors on peut prendre $P = Id$ et dans ce cas la factorisation est unique.

1. Montrer que dans $GL_N(\mathbb{R})$ presque toutes les matrices sont régulières.

2. application: Comment résoudre $AX = B$ connaissant la factorisation de A: $PA = LU$ et ayant à notre dispostion les algorithmes de remontée et de descente pour résoudre les systèmes triangulaires.

2 Choleski: $0 < A = C\,{}^tC$

On suppose A symétrique définie positive et on cherche C triangulaire inférieure dont tous les éléments diagonaux sont strictements positifs: $C_{ii} > 0$.

1. Ecrire le système d'équations que sastisfont les coefficients de C.

2. En déduire un algorithme de calcul des coefficients de C, par identification..

3. Montrer que C est unique.

4. Appliquer cette factorisation à la résolution du système $AX = B$

5. Plus généralement, montrer que que si l'on dispose d'un algorithme efficace pour résoudre $AX = B$ avec $0 < A = {}^tA$, alors on peut résoudre le système $AX = B$ pour une matrice inversible quelconque. (Utiliser $M = {}^tAA$).

3 QR

La méthode QR utilise la factoriastion $A = QR$ avec $Q\,{}^tQ = Id$ et R triangulaire.

1. En utilisant la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt démontrer l'existence d'une telle factorisation. Cette factorisation est-elle unique?

2. Application: comment résoudre simplement le système $AX = B$ avec cette factorisation?

Références :

- $[C]$, Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation,
- $[LT]$, Lascaux & Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée è l'art de l'ingénieur,
- $[S]$, Schatzman, analyse numérique : cours et exercices pour la licence,