Interpolation de Lagrange

Soit $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note pour $k = 0, 1, \cdots, n$, p_k l'unique polynôme de degré au plus k tel que $p_k(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, \cdots, k$.

1. Méthode de Newton: metter en oeuvre un programme de calcul du polynôme d'interpolation p_n à l'aide des différences divisées. On rappelle que:

$$\begin{aligned} \pi_k(x) &= \prod_{i=0}^{k}(x - x_i), \\ p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \cdots, x_k]\pi_{k-1}(x), \\ f[x_k] &= f(x_k), \\ f[x_0, x_1, \cdots x_{k+1}] &= \frac{f[x_1, \cdots x_{k+1}] - f[x_0, \cdots x_k]}{x_{k+1} - x_0}. \end{aligned}$$

   On implémentera le calcul des $f[x_0, x_1, \cdots x_k]$, puis on pourra évaluer p_n à l'aide de la méthode de Horner adaptée à la base de Newton.

2. Interpoler la fonction $f = \sin$ sur $[0, \pi]$ avec beaucoup de points d'interpolation équidistants: $x_i = ih$, $h = \pi/n$, $i = 0, 1, \cdots n$.
   On tracera le graphe de f et de plusieurs polynômes d'interpolation.

3. Phénomène de Runge: Interpoler la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ sur divers intervalles centrés $I = [-a, a]$ avec $1 \leq a \leq 5$ aux:
   (a) points équidistants : $x_i = -a + ih$, $h = 2a/n$, $i = 0, 1, \cdots n$,
   (b) points de Tchebycheff: $x_i = a \cos\left(\dfrac{2i+1}{2n}\pi\right)$, $i = 0, 1, \cdots n - 1$.

   Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

4. Comparer cette méthode de Newton en coût de calcul aux méthodes de:
   (a) "Vandermonde" qui donne les coefficents de p_n dans la base canonique $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ à l'aide d'un système linéaire inversible.
   (b) "Lagrange" qui utilise la base de Lagrange: $p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$, $l_k(x) := \dfrac{\prod_{i \neq k}(x - x_i)}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)}$.

   Comparer aussi ces trois méthodes pour calculer tous les p_k et pour le cas où l'on rajoute x_{n+1}, un point d'interpolation de plus.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [CM], Crouzeix & Mignot, Analyse numérique des équations différentielles.
- [D], Demailly, Analyse numérique & équations différentielles.
- [S], Schatzmann, Analyse numérique, une approche mathématique.