$u_{n+1} = f(u_n)$

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f: $f(I) \subset I$, $f \in C^2(I,I)$, l un point fixe de f: $f(l) = l$, et $\rho = f'(l)$ son " multiplicateur" associé. On note par B ou $B[l]$ le bassin d'attraction de l, c'est à dire l'ensemble des conditions initiales u_0 telles que $(u_n)_n$ converge vers l.

Exercice 0: $I = \mathbb{R}$

1. Calculer l (le ou les points fixes de f) et $B[l]$ pour $f(x) = \rho x$, suivant les valeurs de ρ.
2. Faire de même, pour $f(x) = \rho x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

1 Point fixe attractif: $0 < |\rho| < 1$

1. Soit $I =]0, +\infty[$, $l = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$, trouver B puis montrer que:
   pour tout $u_0 \neq l$, $u_n - 1 \sim \dfrac{\ln u_0}{2^n}$.
2. En général, montrer qu'il existe un intervalle ouvert non vide centré en l, stable par f inclus dans B.
   (Utiliser l'inégalité des accroissements finis près de l).
3. Montrer que que B est toujours un ouvert, et expliquer pourquoi on dit que: " une suite qui converge vers l est stable".
4. En général, montrer que pour tout $u_0 \in B$ tel que (u_n) ne soit pas stationnaire:
   il existe $C \neq 0$ tel que $u_n - l \sim C[\rho]^n$.
   (Utiliser $v_n = \dfrac{u_{n+1} - l}{\rho(u_n - l)}$ puis $w_n = \ln v_n$).

2 Point fixe répulsif: $|\rho| > 1$

1. Etudier l'exemple: $I =]0, +\infty[$, $l = 1$, $f(x) = x^2$.
2. Montrer qu'il existe un ouvert I centré en l, tel que pour tout $u_0 \neq l$, $u_0 \in I$, alors il existe $N > 0$ tel que $u_N \notin I$.
3. En déduire que si (u_n) converges vers l, alors la suite est forcément stationnaire.
4. Montrer que B est dénombrable si f est analytique, puis expliquer pourquoi on dit que: "une suite qui converge vers l est instable numériquement".

3 Exemples de cas limites: $|\rho| = 1$

1. Etudier les cas: $f(x) = \pm x$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \sinh(x)$, $f(x) = (1+x^2)/2$.
2. Si $f(l) = l, \rho = 0, f"(l) \neq 0$, montrer que pour tout $u_0 \in B$ tel que (u_n) ne soit pas stationnaire il existe $C \neq 0$ tel que $u_n - l \sim C/n$.

   (Utiliser $v_n = 1/(u_n - l)$).
3. Pour $f(x) = \sin(x)$, on peut montrer que $u_n \sim C/\sqrt{n}$ si $u_0 \notin \pi\mathbb{Z}$. Donner un argument pour justifier ce comportement de la suite (u_n).

4 Point fixe superattractif $\rho = 0$

1. Calculer explicitement u_n si $f(x) = x^2$ et $I =]-1,1[$.
   montrer que $u_{n+1} = o(u_n)$ et que pour tout $r \in]0,1[$, $u_n = o(r^n)$. On dit que (u_n) est superconvergente.
2. Algorithme de Babylone: Si $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, avec $a > 0$, $I =]0,+\infty[$, vérifier que (u_n) superconverge.

   (On pourra utiliser la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ et vérifier que $u_{n+1} = u_n^2$).
3. Plus généralement, montrer que (u_n) superconverge vers l dès que $u_0 \in B$ quand $\rho = 0$.
4. Montrer que la méthode de Newton conduit généralement à des phénomènes de superconvergence. Par exemple, pour approcher la racine positive de $x^2 - a$, $a > 0$, on obtient l'algorithme de Babylone d'approximation d'une racine carrée.

5 Un exemple de chaos

$f(x) = 4x(1-x)$, $I = [0,1]$, $u_0 \in I$.
Un point α est dit de période p si, avec $u_0 = \alpha$ on a $u_p = u_0$ et $u_k \neq u_0$ pour $k = 1, \cdots, p-1$.

1. En posant $u_0 = \sin^2(\pi\theta_0)$, montrer que l'on a $u_n = \sin^2(\pi\theta_n)$ avec $\theta_n = 2^n\theta_0$.
2. Exhiber des points de périodes 2 de f en écrivant θ_0 en base 2.
3. De même, trouver un point de période 3 puis de toutes les périodes possibles.
4. Proposer un u_0 tel que (u_n) soit dense dans $[0,1]$,
   puis montrer que ceci reste vraie pour presque tout u_0.

Références: de cours avec des exemples corrigés

- [Dev], Devaney, A first course to cahotic dynamical systems.
- [Dem], Demailly, Analyse numérique & équations différentielles.
- [R], Rouvière, PGCD.
- [TM], Tissier & Mialet, Analyse à une variable réelle.