1) Application linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans la plupart des cas)

Une application linéaire est $g : E \to F$

tq $g(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha g(u) + \beta g(v)$ $[u, v \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{k}]$

Si E et F sont de dimension finie et munis de base

$(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ respectivement

la matrice de g dans les bases (e_i) et (f_j) est

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

$g(e_1)$

telle que $g(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} f_j$

2) Endomorphismes, changement de base

Une application linéaire de E ↺ est un endomorphisme.

Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ sont deux bases de E

Il faut savoir exprimer la matrice A d'un endomorphisme g dans la base (e) en fonction de la matrice B de g dans la base (f)

On considère la matrice de changement de base P

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$

telle que $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ et on a $\boxed{B = P^{-1} A P}$

◀ P est la matrice de Id : $(E, (f)) \to (E, (e))$

A matrice de g $(E, (e)) \to (E, (e))$; P^{-1} matrice de Id $(E, (e)) \to (E, (f))$.

Donc $P^{-1} A P = B$ ▶

3) vecteurs propres, valeurs propres

Soit g un endomorphisme, le vecteur non nul u est un vecteur propre de valeur propre λ $(\in k)$ si

$$g(u) = \lambda u$$

L'espace propre E_λ de $\lambda \in k$ est le sous espace vectoriel

$$E_\lambda = \{u \in E \mid g(u) = \lambda \cdot u\}$$

Remarque : si λ est une valeur propre $E_\lambda \neq \{0\}$

Le polynome caractéristique de l'endomorphisme g de E est $P_g(t) = \det(t\,Id - g)$.

Le degré de P_g est la dimension de E.

proposition Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, k valeurs propres distincts, alors les sous espaces propres E_{λ_i} sont en somme directe

(càd ; si $u_i \in E_{\lambda_i}$; $\sum u_i = 0 \Rightarrow \forall i\ u_i = 0$)

◀ Soit $(u_1, \dots, u_k)$; $u_i \in E_{\lambda_i}$ tq $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0$ et $\forall i$, $u_i \neq 0$

En effet, Soit V le sous espace engendré par $(u_1, \dots, u_n)$.

Supposons $V \subsetneq E$. On peut alors supposer (après avoir reordonné les vecteurs) que $(u_1, \dots, u_p)$ forme une base.

Alors $u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$; en particulier $\lambda_{p+1} u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_{p+1} u_i$. (1)

Donc

$g(u_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p} a_i\, g(u_i)$, donc $\lambda_{p+1} u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} a_i \lambda_i u_i$. (2)

On en déduit de (1) et (2) que $\sum_{i=1}^{p} a_i (\lambda_i - \lambda_{p+1}) u_i = 0$

Donc $\forall i$, $a_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$, car $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Comme $u_{p+1} \neq 0$; il existe j tel que $a_j \neq 0$.

Alors $\lambda_j = \lambda_{p+1}$ et la contradiction ▶

proposition Les valeurs propres de g sont les racines du polynome caractéristique de g

◀ En effet, λ est valeur propre si et seulement si $g - \lambda Id$ est non injective ▶

Ex : si $\dim E = 2$, montrez que $P_g(t) = t^2 - t(\mathrm{trace}(g)) + \det(g)$

3) Diagonalisation, reduction des endomorphismes.

Un endomorphisme est diagonalisable si il existe une base de vecteurs propre. De manière equivalente, il existe une base dans lequel la matrice de g est diagonale.

proposition g endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si on peut écrire $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ valeurs propres de E.

Diagonaliser ou réduire un endomorphisme c'est trouver une base

dans lequel cet endomorphisme est diagonalisable

Ex : Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

[par abus de langage, on identifie un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$) avec sa matrice dans la base canonique]

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres de g ; Soit m_i la multiplicite de λ_i dans le polynome caractéristique de g. Alors

Théorème g est diagonalisable si et seulement si (A)

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ P_g \text{ est scindé } \left(P_g(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}\right) \\ (ii)\ m_i = \dim E_{\lambda_i} \end{array}\right\} (B)$$

Remarques a) on a toujours $\dim E_{\lambda_i} \leq m_i$: (Exercice)

b) Tout polynome sur $\mathbb{C}$ est scindé.

On utilisera souvent

Corollaire : Si g endomorphisme de E de dimension n, a n valeurs propres distincts alors g est diagonalisable.

◀ $A \Rightarrow B$:

Par la proposition précedente on a $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$

On choisit pour chaque i une base $(e_1^i, \dots, e_{m_i}^i)$ de E_{λ_i}

Alors $e = (e_j^i)$ est une base de E dans laquelle la matrice

la matrice de g dans E est diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$ et on a $P_g(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

Reciproquement $B \Rightarrow A$; En effet

$$\underbrace{\dim E = d^\circ P_A}_{d^\circ P = \dim E} \underbrace{=}_{\text{car } P \text{ scindé}} \sum_i m_i \underbrace{=}_{\text{hypothèse}} \sum_i \dim E_{\lambda_i} \underbrace{=}_{\text{car somme directe}} \dim\left(\bigoplus E_{\lambda_i}\right)$$

Donc $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$ et donc g est diagonalisable. ▶

3) Diagonalisation et matrices.

Si A est la matrice de g dans la base $(e_1, \dots, e_n)$; si $(u_1 \cdots u_n)$ sont les vecteurs propres et $P = (p_{ij})$ la matrice de passage dont la i^{eme} colonne est donnée par les coefficients du vecteur propre u_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

Alors $D = P^{-1} A P$ est diagonale.