1) Un exercice en dimension 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et g un endomorphisme de E. On sup suppose que le polynome caractéristique de g est scindé. Montrez qu'il existe une base dans laquelle la matrice de g est $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

2) Endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme est trigonalisable si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure

proposition si g est trigonalisable alors son polynome caractéristique est scindé.

$$\blacktriangleleft \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i} a_{ii} \quad \blacktriangleright$$

Voici une autre manière de décrire un endomorphisme trigonalisable. Si $g \in End(E)$. On dit que $F \subset E$ est stable par g, si $g(F) \subset F$.

proposition g est trigonalisable si et seulement si existe des sous espaces stables $F_1 \subset \cdots\cdots \subset F_n = E$ avec $\dim F_i = i$

$\blacktriangleleft$ évident dans un sens ($\text{trigo} \Rightarrow \exists F_i$). Reciproquement on choisit $e_i \in F_i \setminus F_{i-1}$ (convention $F_0 = \{0\}$). Alors, on montre par récurrence

$(e_1, \dots, e_i)$ base de F_i. En effet on a $(e_1, \dots, e_{i+1})$ est libre $\subset E_{i+1}$ donc forme une base car $\dim E_{i+1} = 1 + i$.

$$\text{Alors} \quad F_i \ni g(e_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{ji} e_j .$$

Donc la matrice de g dans $(e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire $\blacktriangleright$

3) Critère de Trigonalisation

On va démontrer le théorème suivant

<u>Thme</u> Soit E un espace vectoriel de dimension n et g un endomorphisme de E. dont le polynome caractéristique est scindé. Il existe alors une suite $E_1, \dots, E_n$ de sous-espace vectoriels de E tels que

(i) $E_i \subset E_{i+1}$

(ii) $\dim E_i = i$

(iii) $g(E_i) \subset E_i$

Le corollaire suit du paragraphe précédent

<u>Corollaire</u> Soit g un endomorphisme de E

Alors g trigonalisable $\Leftrightarrow$ Polynome caractéristique scindé

<u>Corollaire</u> Sur $\mathbb{C}$ (ou un corps algébriquement clos) tout endomorphisme est trigonalisable.

<u>preuve du théorème</u> On le demontre par récurrence sur la dimension n de E.

Le théorème est vrai pour $n=1$. Supposons le vrai pour $n-1$.

Soit g vérifiant les hypothèses. Il existe donc un vecteur propre u_1 de g associé à la valeur propre λ_1. Posons $E_1 = k \cdot u_1$ soit F un supplementaire de E_1

$$E_1 \oplus F = E$$

Soit p la projection sur F // à E_1 et q la projection sur E_1 // F de telle sorte que $g = pg + qg$ (car $p+q = Id$).

Nous avons alors

(i) $h = pg|_F$ est un endomorphisme de F

(ii) le polynome caractéristique de h est scindé. En effet si nous choisissons une base $f_1, \dots, f_{n-1}$ de F, $(u_1, f_1, \dots, f_{n-1})$ est une base de E dans laquelle la matrice de g est

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * * * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

où B est la matrice de h dans $(f_1, \dots, f_n)$

En particulier $P_g(\lambda) = (u_1 - \lambda) P_h(\lambda)$.

Comme P_g est scindé, P_h aussi.

Nous pouvons donc utiliser notre recurrence et obtenir

$F_1 \subset \dots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset F$ avec $\dim F_i = i$

et $h(F_i) \subset F_i$

En particulier $g(F_i) \subset \underbrace{pg(F_i)}_{\subset F_i} + \underbrace{qg(F_i)}_{\subset E_1} \subset F_i \oplus E_1$

$$g(F_i \oplus E_1) \subset F_i \oplus E_1$$

Si nous posons $E_{i+1} = F_i + E_1$. Nous obtenons le resultat. ▶