1) Définition

Un endomorphisme g d'un espace vectoriel de dimension finie n est **nilpotent** si et seulement ssi il existe m tel que $g^m = 0$.

Proposition : si g est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension n, alors

(i) son polynome caractéristique P_χ est X^n

(ii) son polynome minimal P_μ est X^p avec $1 \leqslant p \leqslant n$

◀ En effet, comme X^m annule g, P_μ divise X^m, il est donc de la forme X^p avec $1 \leqslant p \leqslant n$. P_μ est scindé et toutes ses racines sont nulles donc P_χ est scindé avec toutes ses racines nulles. Comme $d^\circ P_\chi = n$; $P_\chi = X^n$ ▶

Le degré du polynome minimal d'un endomorphisme nilpotent est **l'indice de nilpotence** de cet endomorphisme.

remarque (exercice) f est d'indice de nilpotence p, si $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$

On a également

proposition un endomorphisme est nilpotent si et seulement si toutes ses valeurs propres sont nulles et son polynome caractéristique est scindé.

◀ Supposons g nilpotent. Ses valeurs propres sont les racines de son polynome minimal, elles sont donc nulles.

Réciproquement si toutes les valeurs propres de g sont nulles et le polynome caractéristique P_χ est scindé, $P_\chi = X^n$.

alors par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $0 = P_\chi(g) = g^n$ ▶

En particulier un endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

En particulier

<u>proposition</u> Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire avec ses termes diagonaux nuls.

◀ Il suffit dans un sens d'appliquer le critère de trigonalisation.
Dans l'autre sens, on remarque que toutes les valeurs propres sont nulles. ▶

En résumé nous avons

<u>Théorème</u> les assertions suivantes sont équivalentes pour $f \in End(E)$

(i) f nilpotent.

(ii) le polynome caractéristique de f est $(-X)^{\dim E}$

(iii) le polynome minimal de f est X^p, $p \leqslant \dim E$

(iv) f a un polynome caractéristique scindé et 0 comme unique valeur propre

(v) Il existe une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

2) Bloc de Jordan

un **Bloc de Jordan** est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>proposition</u> $f \in End(E)$, admet un bloc de Jordan comme matrice si et seulement si son indice de nilpotence est $\dim(E)$

◀ a) supposons que l'indice de nilpotence est $\dim(E) = p$. Alors, $f^{p-1} \neq 0$. Il existe donc u tel que $f^{p-1}(u) = 0$. Soit V le sous espace engendré par $\{f^q(u), q \geqslant 0\}$. Alors V est stable par f. Par restriction, $(f|_V)^{\dim E} = 0$ donc $f|_V$ est nilpotente. En particulier, comme $f^{p-1}(u) \neq 0$ et $u \in V$, l'indice de nilpotence de $f|_V$

est $> p-1$. En particulier $p-1 < \dim V \leqslant p$. Donc $\dim V = p$.

Comme V est engendré par $u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)$. les vecteurs $(f^{p-1}(u), \dots, f(u), u)$ forment une base. la matrice de f dans cette base est un bloc de Jordan

b) Réciproquement, si la matrice de f est un bloc de Jordan dans la base $(e_1, \dots, e_p)$ Alors f est nilpotente, et $f^{p-1}(e_p) = e_1$; donc $f^{p-1} \neq 0$. L'indice de nilpotence de f est donc p. ▶

3. Décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Une matrice de Jordan nilpotente est une matrice diagonale par blocs dont chacun des bloc est un bloc de Jordan nilpotent.

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent admet une base dans laquelle sa matrice est de Jordan nilpotente.

Nous esquisserons la preuve ici. Par récurrence sur la dimension, il suffit de demontrer le lemme suivant

Lemme. Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Alors il existe une décomposition $E = F \oplus G$ stable par E, telle que $f|_F$ est d'indice $\dim F$.

◀ Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence m ; Soit donc u tel que $f^{m-1}(u) \neq 0$, alors

1) $u, f(u), f^2(u), \dots, f^{m-1}(u)$ forme une base d'un espace vectoriel F stable par f et de dimension m [voir la preuve précédente]

2) Comme $f^* \in End(E^*)$ a comme matrice, la transposée de celle de f, f^* est nilpotente d'indice de nilpotence m.

3) Soit $\lambda \in E^*$, tel que $\langle \lambda | f^{m-1}(u) \rangle \neq 0$; alors $\langle (f^*)^{m-1} \lambda | u \rangle \neq 0$

En particulier $f^{*m-1}(\lambda) \neq 0$. Par le raisonnement précedent $(\lambda, f^*(\lambda), \dots, f^{*m-1}(\lambda))$ engendre un sous espace vectoriel G de dimension m de E^*

4) Soit $H = G^{\perp}$, l'orthogonal de G. Alors $H\cap F=\{0\}$. En effet, soit $0\neq v\in H\cap F$. Alors $v=\sum_{i\geq p}^{m-1} a_i f^i(u)$ et $a_p\neq 0$. Donc $f^{m-p-1}(v) = a_p f^m(u) \neq 0$

Ainsi donc $0\neq \langle \lambda | f^{m-1-p}(v)\rangle = \langle \underbrace{f^{*(m-1-p)}(\lambda)}_{\in G} | \underbrace{v}_{\in G^{\perp}}\rangle = 0$, et la contradicti

5) Comme $\dim H = \operatorname{codim} G = \operatorname{codim} F$, on a $H\oplus F = E$. De plus, d'après le chapitre précédent comme G est stable par f^*, H est stable par f ▶

En petite dimension (jusqu'à 4) la forme de Jordan s'obtient aisément à l'aide des informations suivants.

① M = Indice de nilpotence = taille du plus gros bloc de Jordan

② r = rang = $\#1$ dans la forme de Jordan

Ex. dimension 3

$M=2$: $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $M=3$: $\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$ $M=1$ $\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$

dimension 4

$M=4$: $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$; $M=3$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ $M=1$ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$M=2, R=2$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$; $M=2, R=1$ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$

3) Décomposition de Dunford

Nous avons le théorème

Théorème [Décomposition de Dunford]

Soit f un endomorphisme dont le polynome caracteristique est scindé alors on peut écrire de manière unique

$$(*)\quad f = s+w$$

Avec s et w commutant avec f, s diagonalisable et w nilpotent

On rappelle que l'on dit que h et f commutent si $h \circ f = f \circ h$

<u>Remarques</u> la décomposition $(*)$ s'appelle décomposition de Dunford

Nous découpons la demonstration en deux paragraphes : existence et unicité.

a) Existence de la décomposition de Dunford

Nous avons vu qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f s'écrit en blocs diagonaux

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 \ddots & * \\ 0 & \ddots \lambda_1\end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 \ddots & * \\ 0 & \ddots \lambda_2\end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_3 \ddots & * \\ 0 & \ddots \lambda_3\end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{} \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$.

On considère s la matrice diagonale extraite.

Autrement dit on pose s définie par $s|_{V_{\lambda_i}} = \lambda_i \cdot \mathrm{Id}$ où V_{λ_i} est le sous espace caractéristique.

(i) s et f commutent

Cela se voit directement en utilisant la matrice (par blocs de f)

(ii) $w = s - f$ est unipotente

En effet en utilisant la décomposition par blocs. La matrice de w est triangulaire supérieure avec termes diagonaux nuls.

(iii) w commute avec f

En effet $(s-f)\circ f = f \circ (s-f)$ car f et s commutent

b) Unicité de la décomposition de Dunford.

La démonstration (admise en cours) est plus délicate.

Nous avons besoin de quelques lemmes

1) Si w et w' sont nilpotents et commutent alors $w-w'$ est nilpotent

◀ En effet, on a $w^n=0$, $w'^n=0$, alors

$$(w-w')^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} C_p^{2n} \left(w^{2n-p}\cdot w'^p\right) \quad \text{car } w \text{ et } w' \text{ commutent}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_p^{2n}\, w^{n+(n-p)}\cdot w'^p + \sum_{p=n+1}^{2n} C_p^{2n}\, w^{2n-p}\cdot w'^p$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{2n}\, w^{n+k}\, w'^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+k}^{2n}\, w^{n-k}\cdot w'^{n+k}$$

$$= 0 + 0$$ ▶

2) Si f est diagonalisable et V stable par f alors $f|_V$ est diagonalisable.

◀ En effet $f|_V$ annule un polynome scindé sans racines multiples : le polynome minimal de f ▶

3) Si $E = \oplus V_\lambda$, et f tel que V_λ stable par f et $f|_{V_\lambda}$ diagonalisable alors f est diagonalisable.

◀ On choisit une base de chaque V_λ dans laquelle $f|_{V_\lambda}$ est diagonale. ▶

· ∼ ·

Nous pouvons maintenant demontrer l'unicité.

Soit $f = s' + w'$. Avec s' diagonalisable, w' nilpotent, s' et w' commutant avec f. En particulier, s' preserve les sous espaces caracteristiques. Il existe (par 2) pour chaque V_λ une base $(e_\lambda^1, \ldots, e_\lambda^{k_\lambda})$ dans laquelle s' est diagonale. Dans cette même base $s-s'$ est diagonalisable ; on observe de plus que $s\circ s'|_{V_\lambda} = s'\circ s|_{V_\lambda}$.

Donc par (3), $s-s'$ est diagonalisable, et $s\circ s' = s'\circ s$

Par ailleurs $w\cdot w' = (f-s)\cdot(f-s') = (f-s')(f-s) = w'\cdot w$

Car f, s, s' commutent 2 à 2.

Donc par 1) $w-w'$ est nilpotent. Or $w-w' = s-s' := g$

g est à la fois nilpotent et diagonalisable. Il est donc nul.

Ainsi $w-w' = s-s' = 0$. Autrement dit $w=w'$, $s=s'$ ▶

Décomposition de Jordan

Le théorème important est le suivant. Definissons un bloc de Jordan $J(\lambda,n)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

et $n \in \mathbb{N}$, comme une matrice $n\times n$, $J(\lambda,n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Autrement dit $J(\lambda,n) = \lambda \cdot Id_n + J(n)$, où $J(n)$ est le bloc de Jordan nilpotent de taille n. Une matrice de Jordan (ou sous forme de Jordan) est une matrice diagonale par bloc dont chacun des blocs est de Jordan.

Théoreme (décomposition de Jordan)

Tout endomorphisme de polynome caractenstique scindé admet une base dans laquelle sa matrice est de Jordan.

On parle quelque fois de « trouver la réduite de Jordan » ou de « réduction de Jordan » pour décrire l'opération chechant à obtenir la matrice de Jordan.

Remarque : le procédé donne la base, mais celle ci est loin d'être unique.

◀ On utilise la preuve de Dunford.

On a la decomposition de $E = \oplus V_{\lambda_i}$ où les V_{λ_i} sont les sous-espaces caractéristiques de f. On sait que $f - \lambda_i Id|_{V_{\lambda_i}}$ est nilpotente. Soit $\mathcal{E}^i = (e_1^i, \dots, e_{k_i}^i)$ la base de V_{λ_i} dans laquelle $f - \lambda Id_{V_{\lambda_i}}$ est de Jordan.

Alors $f|_{V_{\lambda_i}}$ est de Jordan dans la base $\mathcal{E}^i$. Enfin, la base $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{E}_n$ est la base rechechée ▶