Soit E un espace vectoriel sur un corps k. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans k. Si

L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E et est noté E^*

On a donc $E^* = L(E,k)$. Si $f \in E^*, x \in E$ on note $\langle f, x\rangle := f(x)$

<u>proposition</u> L'espace E^* est muni d'une structure d'espace vectoriel vérifiant si f et $g \in E^*$

$$\langle \lambda f + \mu g, x\rangle := \lambda \langle f, x\rangle + \mu \langle g, x\rangle$$

◀ évident : exercice ▶

Base duale

On suppose dorénavant que E est de dimension finie

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$; il existe une unique forme linéaire f telle que $\langle f, e_j\rangle = \alpha_j \ \forall j$

◀ en effet, c'est la forme linéaire dont la matrice (en tant qu'élément de $L(E,k)$) est $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On a $\langle f, \sum_i x_i e_i\rangle = \sum_i x_i \alpha_i$ ▶

En particulier soit e^i telle que $\langle e^i, e_j\rangle = 1$ si $i=j$, 0 sinon

la famille $(e^1, \dots, e^n)$ forme une base de E^*, appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

◀ en effet $f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle e^i$ pour toute forme linéaire f (à vérifier !). $(e^1, \dots, e^n)$ est donc un système générateur. Enfin si

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i = 0 \ ; \text{ alors } 0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i(e_j) = \lambda_j \ \forall j \ ; \text{ donc}$$

$(e^1, \dots, e^n)$ est libre ▶

Bidual le bidual de E est $(E^*)^*$

On a une bijection cannonique de $E \xrightarrow{i} (E^*)^*$

$$x \longmapsto (f \mapsto \langle f, x \rangle)$$

Autrement dit $\langle i(x), f \rangle = \langle f, x \rangle$

◀ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(e^1, \dots, e^n)$ sa base duale.

Par definition $\langle i(x), e^i \rangle = e^i(x)$. En particulier si $g \in (E^*)^*$.

soit $\hat{g} = \sum_1 \langle g, e^i \rangle e_i$; alors $\langle i(\hat{g}), e^i \rangle = \langle g, e^i \rangle$

Donc $i(\hat{g}) = g$; i est donc surjective, donc bijective car

$\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$ ▶

Transposée : Soit f un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme f^* de E^*, telle que $\langle f^*(\alpha), x \rangle = \langle \alpha, f(x) \rangle$

◀ Si $\alpha \in E^*$; posons $f^*(\alpha) : x \mapsto \langle \alpha, f(x) \rangle$.

On verifie que $f^*(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda f^*(\alpha) + \mu f^*(\beta)$ ▶

L'endomorphisme f^* s'appelle la transposée de f.

La matrice de f^* dans la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$ est la transposée de la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

◀ En effet $\langle f^*(e^i), e_j \rangle = \langle e^i, f(e_j) \rangle$

Si $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$; on a donc $\langle f^*(e_i), e_j \rangle = a_{ij}$

Donc $f^*(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \langle f^*(e_i), e_j \rangle \cdot e^j = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e^j$ ▶

On laisse en exercice $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$

Sous espace vectoriels.

Remarquons tout d'abord que si $\alpha \in E^*$, $\alpha \neq 0$ alors $\ker(\alpha)$ est un hyperplan. Reciproquement tout hyperplan H, s'ecrit $H = \ker(\alpha)$.

En effet si on choisit une base $(e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{aligned} H &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot x_i = 0\} \\ &= \{(x_1, \dots x_n) \mid \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^i, x \rangle = 0\} \\ &= \ker\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e^i\right) \blacktriangleright \end{aligned}$$

Plus généralement, soit V un s-espace vectoriel de E.

L'orthogonal de V est $V^\perp \subset E^*$; défini par

$$V^\perp = \{\alpha \in E^*, \ \alpha|_V = 0\}$$

L'espace $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel. De plus,

$$\dim V^\perp + \dim V = \dim E$$

◀ On vérifie aisément que $V^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^*.

On choisit une base $(e_1, \dots\dots, e_n)$ telle que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de V

Alors $V^\perp = \mathrm{Vect}(e^{p+1}, \dots, e^n)$

En effet, comme $e^{p+i}|_V = 0$ si $i \geq 0$, $\mathrm{Vect}(e^{p+1}, \dots, e^n) \subset V^\perp$.

Si $\alpha \in V^\perp$; alors $\langle \alpha | e_i \rangle = 0$ si $i \leq p$

Donc $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \langle \alpha | e_i \rangle e^i = \sum_{i=p+1}^{m} \langle \alpha | e_i \rangle e^i \in \mathrm{Vect}(e^{p+1}, \dots, e^n)$.

Donc $V^\perp = \mathrm{Vect}(e^{p+1}, \dots, e^n)$. La proposition suit ▶

On a $(V^\perp)^\perp = i(V)$ où i est l'isomorphisme entre E et E^{**}.

◀ en effet $\forall \alpha \in V^\perp$, $\forall u \in V$; $\langle i(u), \alpha \rangle = \langle \alpha, u \rangle = 0$.

Donc $i(V) \subset (V^\perp)^\perp$; mais comme $\dim(V) = \dim(i(V)) = n - \dim(V^\perp)$

$= \dim(V^\perp)^\perp$; on a bien $(V^\perp)^\perp = i(V)$ ▶

$(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$; $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $V^\perp$; alors $V = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$

◀ en effet $V \subset \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i)$. Par ailleurs, si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$, alors $\forall f \in V^{\perp}, \langle f, x\rangle = \sum \lambda^i \langle f_i, x\rangle = 0$.

Autrement dit $x \in (V^{\perp})^{\perp}$ (identifiant E et E^{**}).

Donc $x \in V$. ▶

Ceci s'interprète comme l'équation du sous-espace vectoriel

Transposée et orthogonal.

On a (i) $\ker(f^*) = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$

(ii) $\operatorname{Im} f^* = \ker(f)^{\perp}$

(iii) V stable par $f \Leftrightarrow V^{\perp}$ stable par f^*

◀ Si $f(x) = 0$, alors $\langle f^*\alpha, x\rangle = \langle \alpha, f(x)\rangle = 0$

Donc $f^*(\alpha) \in \ker(f)^{\perp}$. Ainsi $\operatorname{Im} f^* \subset (\ker f)^{\perp}$

comme ces deux espaces ont la même dimension ils sont égaux. Ceci montre (ii)

$\cdot\sim\cdot$

Si $y = f(x)$, et $f^*(\alpha) = 0$, alors $\langle \alpha, y\rangle = \langle \alpha, f(x)\rangle = \langle f^*\alpha, x\rangle = 0$

Autrement dit $\operatorname{Im} f \subset \ker(f^*)^{\perp}$, pour des raisons de dimension on a (i).

$\cdot\sim\cdot$

Si $f(V) \subset V$; alors $\forall w \in V^{\perp}$ $\langle w | f(v)\rangle = 0$

Donc $\langle f^*(w), v\rangle = 0$. Ainsi $f^*(w) \in V^{\perp}$ donc $f^*(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$

De même si $f^*(V^{\perp}) \subset V^{\perp}$; alors $\langle f^*(u), v\rangle = 0$ si $u \in V^{\perp}, v \in V$.

Donc $\langle u, f(v)\rangle = 0$. Donc $f(v) \in (V^{\perp})^{\perp} = V$. ▶