Réduction des endomorphismes

Dualité.

4. Formes linéaires, hyperplans, dualité

Parmi les applications linéaires définies sur un espace vectoriel k, celles à valeurs dans le corps de base k jouent un rôle tout-à-fait particulier.
Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie n sur k.

4.1. **Définitions.** Une **forme linéaire** f sur E est une application linéaire $f : E \longrightarrow k$. L'ensemble de ces formes linéaires est un espace vectoriel sur k, appelé **espace dual** de E et noté E^* (le vérifier).
On appelle **hyperplan** de E un sous-espace vectoriel de E qui est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition 4.2. *Une forme linéaire non nulle a pour noyau un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel H de dimension $n-1$ de E est le noyau d'au moins une forme linéaire sur E, qu'on appellera* équation *de H. L'ensemble des formes linéaires nulles sur H est un espace vectoriel de dimension 1.*

Démonstration. Une forme linéaire est de rang 0 si elle est nulle, ou 1 sinon. Dans ce dernier cas, son noyau (théorème du rang) est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de E. Réciproquement, si H est un tel sous-espace, on en choisit une base que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E par un vecteur e (il suffit pour cela que $e \notin H$). Il existe une unique forme linéaire qui vaut 1 sur e et 0 sur H. Comme elle n'est pas nulle son noyau est de dimension $n-1$ et contient H, donc c'est H. Soit g un autre forme linéaire nulle sur H. On a $g = g(e)f$. En effet c'est vrai pour tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, donc sur E par linéarité. □

4.3. **Base duale.** On suppose donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout i de 1 à n on définit la forme linéaire e_i^* par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$e_i^*(e_j) = 1 \text{ si } i = j, \text{ sinon } 0.$$

Le système $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale *de $\mathcal{B}$. L'espace dual est donc un espace vectoriel de dimension finie n.*
En effet, si f est une forme linéaire définie par $f(e_i) = f_i$ pour tout i de 1 à n, on obtient

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i^*$$

puisque ces deux formes prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs de $\mathcal{B}$. De plus, si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ est la forme nulle, elle prend la valeur 0 sur le vecteur e_j, pour tout j de 1 à n, ce qui prouve que $\lambda_j = 0$, pour tout j de 1 à n.
Soit i un entier, $1 \leq i \leq n$. Remarquons que le noyau de la forme e_i^* est l'hyperplan de E engendré par $\{e_j, j \neq i\}$. Si x est un vecteur de E qui se décompose en $x = \sum_i x_i e_i$ dans la base $\mathcal{B}$, on a $e_i^*(x) = x_i$. C'est pour cela que l'on appelle e_i^* la i-ème *forme coordonnée.*
Si f est une forme linéaire sur E et x un vecteur de E, on note souvent $\langle f, x\rangle$ pour $f(x)$. Ceci pour insister sur le caractère bilinéaire de l'application suivante, qu'on appelle *forme bilinéaire* puisqu'elle est à valeurs dans k :

$$\begin{array}{ccc} E^* \times E & \longrightarrow & k \\ (f, x) & \longmapsto & f(x) = \langle f, x\rangle \end{array}$$

Le vérifier.

Proposition 4.4. *E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur k. On suppose donnés n éléments $e_1, \dots, e_n$ de E et n formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$ sur E qui vérifient :*

$$\ell_i(e_j) = 0 \textit{ si } i \neq j \textit{ et } 1 \textit{ sinon}$$

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est une base de E^* et ces deux bases sont duales l'une de l'autre, c'est-à-dire :

(1) *si x est un vecteur de E, sa décomposition dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $x = \sum_{i=1}^n \ell_i(x) e_i$;*
(2) *si f est une forme linéaire sur E, sa décomposition sur la base $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est $f = \sum_{i=1}^n f(e_i)\ell_i$.*

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Evaluons la forme linéaire f_j sur ce vecteur. On obtient : $f_j(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \alpha_j$ et on en déduit que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ est nul si et seulement si tous les α_j, $1 \leq j \leq n$, sont nuls. Terminer la preuve. □

4.5. **Bidual.** La proposition 4.4 montre que E est isomorphe au dual de E^*. Mieux : il existe une application linéaire canonique

$$\begin{array}{rcl} c : E & \longrightarrow & E^{**} = (E^*)^* \\ x & \longmapsto & (f \longmapsto \langle f, x\rangle) \end{array}$$

qui est injective. Lorsque E est de dimension finie sur k, elle est aussi bijective.
Faire la preuve. Expliquons juste la notation : L'image d'un vecteur x par l'application c est une forme linéaire

sur E^*. On la définit donc par son effet sur une forme linéaire f. On dit que l'application est *canonique (ou naturelle)* parce qu'elle est définie sans autre donnée que celle de l'espace vectoriel E, en particulier sans avoir à préciser une base de E.
Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale, vérifier que la base duale de $\mathcal{B}^*$ est la base $\mathcal{B}$ de $E^{**} = E$.

Exercice 4.6. On considère l'espace vectoriel $E = k_n[X]$ des polynômes de dégré au plus n sur k. On se donne $n+1$ éléments de k distincts deux à deux et notés $a_0, \ldots, a_n$. À chacun des a_i, $0 \leq i \leq n$ on associe l'évaluation en a_i :

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{a_i} : E &\longrightarrow k \\ P &\longmapsto P(a_i) \end{aligned}$$

Montrer que c'est une forme linéaire sur E.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P_i de E qui vaut 1 en a_i et s'annule en a_j si $j \neq i$.
En déduire que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E, que $(\mathrm{ev}_{a_0}, \ldots, \mathrm{ev}_{a_n})$ est une base de E^*. Comment s'écrit un polynôme P dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$?
Remarquer que l'application coeff_n qui associe à un polynôme de E le coefficient de son monôme de degré n est une forme linéaire sur E. En déduire qu'un polynôme P de E est de degré strictement inférieur à n si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod_{i \neq j}(a_i - a_j)} = 0$$

Exercice 4.7. Cet exercice prend la suite du précédent. On suppose d'abord $k = \mathbf{R}$ et $n = 1$. Remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_1} : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ P &\longmapsto \int_{a_0}^{a_1} P(t)dt \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbf{R}_1[X]$. L'exprimer en fonction de ev_{a_0} et ev_{a_1} et retrouver la formule dite des trapèzes.
On suppose $n = 2$. Exprimer la forme linéaire $\int_{a_0}^{a_1}$ en fonction de $\mathrm{ev}_{a_0}, \mathrm{ev}_{a_1}, \mathrm{ev}_{a_2}$.
On suppose de plus que $a_2 = \frac{a_0+a_1}{2}$. Montrer qu'il existe un polynôme R de degré 3 qui s'annule en a_0, a_1 et a_2 et dont l'intégrale $\int_{a_0}^{a_1} R(t)dt$ est aussi nulle. En déduire la formule dite des trois niveaux : *si a et b sont deux réels et P un polynôme de degré au plus 3, on a :*

$$\int_a^b P(t)dt = \frac{(b-a)}{6}\left(P(a) + P(b) + 4\,P(\frac{a+b}{2})\right)$$

4.8. **Orthogonalité.** On dira qu'un vecteur x de E et une forme linéaire f de E^* sont *orthogonaux* si $\langle f, x\rangle = f(x) = 0$.
Soit A une partie de E. L'*orthogonal* de A est l'ensemble des formes linéaires de E^* nulles sur A. On le note $A^\perp$. Comme E s'identifie au bidual E^{**}, toute partie B de E^* a également un orthogonal dans E que l'on note $B^\perp$. Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Bien retenir qu'une partie et son orthogonal ne sont *jamais* dans le même espace !

Proposition 4.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur k.*

(1) *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension p de E, alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ de E^* et $(F^\perp)^\perp = F$.*
(2) *Si $F \subset G$ sont deux sous-espaces de E, alors $F^\perp \supset G^\perp$.*
(3) *Si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.*
(4) *Si A est une partie de E alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $(A^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(A)$.*

Démonstration. (1) : On complète une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Une forme linéaire f est nulle sur F si et seulement si elle s'annule sur tous les e_i, $1 \leq i \leq p$, autrement dit si elle appartient au sous-espace $\mathrm{Vect}(e^*_{p+1}, \ldots, e^*_n)$ qui est donc l'espace $F^\perp$ cherché. □

Montrer les autres assertions de la proposition.

Corollaire 4.10. *Si $F \subsetneq E$ est un sous-espace vectoriel distinct de E, il existe alors une forme linéaire non nulle qui s'annule sur F. Si x est un vecteur non nul de E, il existe une forme linéaire qui ne s'annule pas sur x.*

Démonstration. Remarquer que :

(1) si $F \subsetneq E$, $F^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$ dans E^*.
(2) si $x \neq 0$, $\{x\}^\perp$ n'est pas tout E^*.

□

Exemple 4.10.1. Équations d'un sous-espace vectoriel. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *système d'équations de F dans E* la donnée d'une base de $F^\perp$. On voit que si un tel système d'équations n'est pas unique, l'espace $F^\perp$ lui, est uniquement déterminé par F. Écrire des équations de F c'est donc réaliser F comme l'orthogonal d'un ensemble fini minimal de formes linéaires.
Si F est de dimension p, et si $f_1, \ldots, f_{n-p}$ est un système d'équations de F on a $F \subset \ker f_j$ pour tout $1 \leq j \leq n-p$. D'après les propriétés énoncées en 4.9 :

$$F = \bigcap_{j=1}^{n-p} \ker f_j.$$

Géométriquement, on décrit F comme intersection d'un nombre fini minimal d'hyperplans vectoriels.
Par exemple, si F est une droite dans un espace vectoriel de dimension 3, un système d'équations linéaires de la droite est composé de deux formes linéaires indépendantes qui s'annulent donc chacune sur un plan. La droite

est l'intersection de ces deux plans. Si on choisit une autre base de $F^\perp$, on obtiendra une autre manière de représenter la droite comme intersection de deux plans.

4.11. **Transposé d'un endomorphisme.**

Définition 4.12. *Soit u un endomorphisme de E. La formule*

$$\langle {}^t u(f), x\rangle = \langle f, u(x)\rangle$$

définit un unique endomorphisme de E^*, appelé endomorphisme transposé de u et noté ${}^t u$.

Démonstration. On voit que, pour tout $f \in E^*$, on a ${}^t u(f) = f \circ u$. L'application ${}^t u : E^* \longrightarrow E^*$ est bien définie. Vérifier qu'elle est linéaire. La définition montre aussi que la transposition est involutive : ${}^t({}^t u) = u$. □

Proposition 4.13. *Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie n sur k. Les propriétés de son transposé sont les suivantes :*

1. $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im} u)^\perp$; $\mathrm{Im}({}^t u) = (\ker u)^\perp$;
2. *Si A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, alors la matrice de ${}^t u$ dans la base duale $\mathcal{B}^*$ est la matrice transposée ${}^t A$.*
3. *Pour tout v endomorphisme de E,* ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$.
4. *$F \subset E$ est un sous-espace stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par le transposé ${}^t u$.*

Démonstration. Montrons le (4) : supposons F stable par u. Remarquer d'abord que

$$\ell \in F^\perp \Longleftrightarrow \forall x \in F \quad \langle \ell, x\rangle = 0$$

Comme F est stable par u, on aura donc, pour tout élément ℓ de $F^\perp$,

$$0 = \langle \ell, u(x)\rangle = \langle {}^t u(\ell), x\rangle$$

ce qui prouve que ${}^t u(\ell)$ est dans $F^\perp$ pour tout ℓ dans $F^\perp$, c'est-à-dire $F^\perp$ stable par ${}^t u$. La réciproque s'obtient en échangeant les rôles de u et ${}^t u$.
Prouvez les autres assertions de la proposition. □

Exercice 4.14. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(k)$ est diagonale par blocs s'il existe une partition de n en $n = N_1 + \cdots + N_s$ telle que, en notant $M_{i,j}$ les coefficients de la matrice M des lignes de numéro i compris entre $N_1 + \cdots + N_\ell + 1$ et $N_1 + \cdots + N_\ell + N_{\ell+1}$ sont nuls sauf si la colonne à un numéro j qui est dans le même intervalle ; soit encore : $M_{i,j} = 0$ sauf s'il existe ℓ, $1 \le \ell \le s$ tel que $N_1 + \cdots + N_\ell + 1 \le i, j \le N_1 + \cdots + N_\ell + N_{\ell+1}$.
Vérifier que la somme (resp. le produit) de deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$, diagonales par blocs pour la même partition $n = N_1 + \cdots + N_s$ de n, est une matrice diagonale par blocs pour la même partition.
Vérifier que si M est inversible et diagonale par blocs pour une partition $n = N_1 + \cdots + N_s$ de n, alors son inverse est une matrice diagonale par blocs pour la même partition.
Montrer que le déterminant d'une matrice diagonale par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.
De manière analogue, considérer les matrices triangulaires supérieures par blocs et démontrer les propriétés similaires.