Réduction des endomorphismes

Endomorphismes nilpotents.

5. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe une puissance de u qui est l'endomorphisme nul. Le plus petit des entiers $s \geq 1$ tel que $u^s = 0$ dans $\mathrm{End}(E)$ est l'indice de nilpotence de u. C'est dire que si l'indice de nilpotence de u est N, le polynôme minimal de u est X^N et u^{N-1} n'est pas l'endomorphisme nul.
On voit donc que la seule valeur propre de u est 0, l'espace propre associé étant le noyau de u qui n'est donc pas réduit à $\{0\}$.

EXERCICE 5.1. Soit E de dimension finie n sur k et $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) u est nilpotent.
(2) le polynôme caractéristique de u est scindé et u a 0 comme seule valeur propre.

En déduire que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme est au plus égal à n.

Si u est nilpotent d'indice $N \geq 1$, alors u^{N-1} n'est pas l'endomorphisme nul ; il existe au moins un vecteur x de E tel que $u^{N-1}(x) \neq 0$.

Lemme 5.2. *Le système $(x, u(x), \ldots, u^{N-1}(x))$ est un système libre de E qui engendre un sous-espace vectoriel $F \subset E$ stable par u. La restriction $u_{|F}$ est un endomorphisme nilpotent de* $\mathrm{End}(F)$ *d'indice de nilpotence N. Sa matrice dans la base $(u^{N-1}(x), \ldots, u(x), x)$ de F est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On appelle un telle matrice triangulaire supérieure, bloc de Jordan *de taille N et de valeur propre 0.*

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire non triviale $y = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i u^i(x)$. Supposons que les α_i ne sont pas tous nuls et appelons i_0 le premier indice i tel que $\alpha_i \neq 0$. Si on applique u^{N-i_0-1} à y, on trouve $u^{N-i_0-1}(y) = \alpha_{i_0} u^{N-1}(x)$ qui n'est pas nul. On en déduit que y n'est pas nul. La première assertion du lemme est démontrée. Prouver les suivantes. □

Notre but est de prouver qu'il existe un supplémentaire de F lui aussi stable par u. Pour cela, on va utiliser la dualité (prop. 4.4). Tout d'abord, il existe une forme linéaire f qui ne s'annule pas sur $u^{N-1}(x)$ (corollaire 4.10). On en déduit que, d'après la définition du transposé :

$$0 \neq \langle f, u^{N-1}(x) \rangle = \langle {}^t u^{N-1}(f), x \rangle$$

Il s'ensuit que l'endomorphisme ${}^t u^{N-1}$ n'est pas nul dans $\mathrm{End}(E^*)$. Mais, d'après les propriétés de composition des transposés ${}^t u^j = ({}^t u)^j$ pour tout entier j. On en déduit d'une part que $({}^t u)^N = 0$, d'autre part que $({}^t u)^{N-1} \neq 0$, ce qui signifie que ${}^t u$ est nilpotent d'indice N exactement.
De manière analogue à ce que nous avions fait pour u, on en déduit que $G := \mathrm{Vect}(f, {}^t u(f), \ldots, {}^t u^{N-1}(f))$ est un sous-espace de dimension N de E^* qui est stable par ${}^t u$.

Lemme 5.3. *L'orthogonal de G dans E est un supplémentaire de F stable par u. La restriction de u à ce sous-espace est nilpotente d'indice de nilpotence au plus égal à celui de u.*

Démonstration. On sait, d'après la proposition 4.13 que $G^\perp$ est stable par u. Comme $u^N = 0$ dans $\mathrm{End}(E)$, la restriction de u à $G^\perp$ vérifie $(u_{|G^\perp})^N = 0$. On sait aussi que l'orthogonal $G^\perp$ est de dimension $n - N$. C'est un supplémentaire de F si et seulement si $F \cap G^\perp = \{0\}$. Un élément y non nul de F se décompose en $y = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i u^i(x)$ avec des α_i non tous nuls. Appelons i_0 le premier indice i tel que $\alpha_i \neq 0$. Si y est aussi dans $G^\perp$ il est annulé en particulier par ${}^t u^{N-i_0-1}(f)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \langle {}^t u^{N-i_0-1}(f), y \rangle &= \langle f, u^{N-i_0-1}(y) \rangle \\ &= \langle f, \alpha_{i_0} u^{N-1}(x) \rangle = \alpha_{i_0} \langle f, u^{N-1}(x) \rangle \end{aligned}$$

ce qui est impossible, d'après la propriété de f. On a donc obtenu une contradiction et $F \cap G^\perp = \{0\}$. □

Théorème 5.4 (Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur k et u un endomorphisme nilpotent. Il existe une décomposition en somme directe de sous-espaces stables par u*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$$

telle que, pour tout i, $1 \leq i \leq s$, il existe un vecteur $x_i \in E_i$ dont les transformés successifs par les puissances de u engendrent E_i.

Si on note N_i la dimension de E_i, la restriction $u_{|E_i}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice N_i. Sa matrice dans la base $(u^{N_i-1}(x_i), \ldots, x_i)$ est un bloc de Jordan de taille N_i et de valeur propre 0. L'entier $N = N_1 = \max(N_1, \ldots, N_s)$ est l'indice de nilpotence de u.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E. Si la dimension est 0, il n'y a rien à faire. Sinon on trouve, d'après les lemmes 5.2 et 5.3, une décomposition $E = F \oplus G^{\perp}$ en sous-espaces stables par u. La restriction $u_{|F}$ est, par construction, d'indice de nilpotence N égal à l'indice de nilpotence de u. On pose $E_1 = F$ et on suppose, par hypothèse de récurrence, que le théorème est vrai pour la restriction de u à $G^{\perp}$ qui est nilpotente d'indice au plus égal à celui de u. Le théorème est alors démontré pour E. □

Voyons maintenant comment la suite d'entiers $N_1 \geq \ldots \geq N_s$ est uniquement déterminée par u. Nous avons déjà remarqué que la taille du plus grand bloc de Jordan, $N = N_1 = \max(N_1, \ldots, N_s)$, est l'indice de nilpotence de u.
Rappelons que chaque sous-espace E_i est engendré par une base $(u^{N_i-1}(x_i), \ldots, x_i)$. La réunion de ces bases est une base de E que nous notons $\mathcal{B}$.
Combien y a-t-il de blocs de Jordan ? Autant que de vecteurs de $\mathcal{B}$ de la forme $u^{N_i-1}(x_i)$. Ces vecteurs forment une base $\mathcal{B}_1$ du noyau de u (le vérifier). Le nombre s de blocs de Jordan est donc la dimension du noyau de u.
Combien y a-t-il de blocs de Jordan de taille au moins 2 ? Autant que de vecteurs de $\mathcal{B}$ de la forme $u^{N_i-2}(x_i)$ qui, ajoutés à $\mathcal{B}_1$ forment une base $\mathcal{B}_2$ du noyau de u^2 (le vérifier). Le nombre de blocs de Jordan de taille au moins 2 est donc

$$\dim(\ker u^2) - \dim(\ker u)$$

En déduire la preuve de la proposition suivante :

Proposition 5.5. *Sous les hypothèses du théorème, la donnée de la suite $N_1 \geq \ldots \geq N_s$ des tailles des blocs de Jordan de u est équivalente à la donnée de la suite des dimensions des noyaux $\dim(\ker u) \leq \dim(\ker u^2) \leq \cdots \leq \dim(\ker u^N) = n$. La suite $N_1 \geq \ldots \geq N_s$ est donc uniquement déterminée par u.*

Exercice 5.6. On convient de représenter la suite $N_1 \geq \ldots \geq N_s$ par un tableau comme ci-dessous dont la ℓ-ème ligne comporte N_ℓ cases.

$$\begin{array}{llllll} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \\ \square & & & & & \\ \square & & & & & \end{array}$$

On peut considérer que les cases du tableau indexent les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On peut voir l'action de u sur ces vecteurs comme une translation de 1 case vers la case voisine à gauche sur la même ligne, les cases de la première colonne étant associées à des vecteurs du noyau envoyés sur 0 par u. De manière analogue à l'exemple 2.6.1 on pourrait schématiser l'action de u sur les vecteurs de $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{array}{l} 0 \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \\ 0 \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \square \\ 0 \longleftarrow \square \\ 0 \longleftarrow \square \end{array}$$

Montrer que le nombre de cases dans la j-ème colonne du tableau est le nombre de blocs de Jordan de taille au moins j. Exprimer les dimensions des noyaux des puissances de u à l'aide du tableau.
Décrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ obtenue en prenant les vecteurs de $\mathcal{B}$ de la première colonne du tableau à partir du bas, puis ceux de la deuxième colonne à partir du bas, etc.

Donnons le théorème équivalent pour les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(k)$.

Théorème 5.7 (Décomposition de Jordan des matrices nilpotentes)**.** *Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(k)$. Il existe une matrice inversible P de $\mathrm{GL}_n(k)$ telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{N_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{N_s} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale par blocs, où les matrices J_{N_ℓ}, $1 \leq \ell \leq s$ sont des blocs de Jordan de taille N_ℓ et de valeur propre 0. Les entiers $N_1 \geq \ldots \geq N_s$ sont uniquement déterminés par A.

Corollaire 5.8. *Deux matrices nilpotentes A et B étant données dans $\mathcal{M}_n(k)$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(k)$ telle que $B = P^{-1}AP$ est que A et B définissent la même suite d'entiers $N_1 \geq \ldots \geq N_s$.*

Démonstration. A et B ont alors même forme normale de Jordan. □

Remarque. Un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement si il est nul, autrement dit d'indice de nilpotence 1. Réciproquement, un endomorphisme nilpotent d'indice $n \geq 2$ n'est *jamais* diagonalisable.