Réduction des endomorphismes

Réduction de Jordan.

6. Décomposition de Jordan

Dans toute cette section, on considère un corps k, un espace vectoriel E de dimension n sur k, et un endomorphisme u dans $\mathrm{End}(E)$.
On va d'abord montrer un premier théorème de décomposition :

Théorème 6.1 ("des noyaux")**.** *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et P un polynôme non nul de $k[X]$ annulateur de u. On suppose que P se factorise en un produit $P = P_1P_2$ de deux polynômes* premiers entre eux. *Il existe alors une décomposition en somme directe de sous-espaces stables par u :*

$$E = E_1 \bigoplus E_2$$

avec $E_1 = \ker P_1(u) = \mathrm{Im}(P_2(u))$ et $E_2 = \ker P_2(u) = \mathrm{Im}(P_1(u))$. De plus, les projecteurs sur chacun des termes de cette décomposition sont des polynômes en u.

Démonstration. L'ingrédient essentiel de la preuve est le théorème de Bézout dans l'anneau $k[X]$. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, il existe deux polynômes V_1 et V_2 tels que, dans $k[X]$,

$$1 = P_1(X)V_1(X) + P_2(X)V_2(X)$$

On en déduit d'abord que, dans $\mathrm{End}(E)$, où le produit est la composition des applications,

$$\mathrm{Id} = P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u),$$

ce qui montre que tout vecteur $x \in E$ se décompose en

$$x = P_1(u)\left(V_1(u)(x)\right) + P_2(u)\left(V_2(u)(x)\right)$$

avec le premier terme de la somme dans $\mathrm{Im}(P_1(u))$ et le deuxième dans $\mathrm{Im}(P_2(u))$. On a donc $E = \mathrm{Im}(P_1(u)) + \mathrm{Im}(P_2(u))$. Remarquons d'autre part que, dans $\mathrm{End}(E)$,

$$0 = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u).$$

On a donc $\mathrm{Im}(P_2(u)) \subset \ker(P_1(u))$ et aussi $\mathrm{Im}(P_1(u)) \subset \ker(P_2(u))$. On en conclut qu'a fortiori

$$E = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)).$$

Pour prouver que la somme est directe, considérons x dans l'intersection $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$ et utilisons cette fois la décomposition de x sous la forme

$$x = V_1(u)\left(P_1(u)(x)\right) + V_2(u)\left(P_2(u)(x)\right)$$

puisque les endomorphismes de $k[u]$ commutent entre eux. On voit que x est nul puisque ses deux composantes sont nulles. Au passage, on a démontré que $\mathrm{Im}(P_2(u)) = \ker(P_1(u))$ et $\mathrm{Im}(P_1(u)) = \ker(P_2(u))$: si l'une des inclusions était stricte, on ne pourrait avoir $E = \mathrm{Im}(P_1(u)) + \mathrm{Im}(P_2(u))$. On a également démontré que $P_i(u) \circ V_i(u)$ est le projecteur sur le sous-espace E_i ($i = 1$ ou $i = 2$). □

Exercice 6.2. On donne des polynômes $P_1, \ldots, P_r$ de $k[X]$ *premiers entre eux deux à deux.* Pour $1 \leq i \leq r$ on note Q_i le produit $\prod_{j \neq i} P_j$. Montrer qu'il existe des polynômes $V_1, \ldots, V_r$ tels que, dans $k[X]$,

$$1 = \sum_{i=1}^{r} V_i(X)Q_i(X).$$

Relier cette égalité à la décomposition en éléments simples de $1/P$ dans $k(X)$, avec $P = P_1 \ldots P_r$.
Soit u dans $\mathrm{End}(E)$ et P un polynôme non nul de $k[X]$ annulateur de u. On suppose que P se factorise en un produit $P = P_1 \ldots P_r$ de polynômes *premiers entre eux deux à deux.* Montrer qu'il existe alors une décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

avec $E_i = \ker P_i(u) = \mathrm{Im}(Q_i(u))$.
Pour $1 \leq i \leq r$, montrer que $V_i(u) \circ Q_i(u)$ est le projecteur sur le sous-espace E_i. On l'appelle *projecteur spectral* associé à la valeur propre λ_i.

Corollaire 6.3 (Décomposition en sous-espaces caractéristiques)**.** *On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur k en :*

$$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^{r} m_i = n.$$

où les λ_i, $1 \leq i \leq r$ sont deux à deux distincts. Il existe alors une décomposition en somme directe de sous-espaces stables par u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

avec $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}$ et $\dim E_i = m_i$, $1 \leq i \leq r$. La restriction $(u - \lambda_i \mathrm{Id})_{|E_i}$ est un endomorphisme nilpotent. On appelle E_i le sous-espace caractéristique de u *(ou parfois sous-espace propre généralisé de u) associé à la valeur propre λ_i, $1 \leq i \leq r$.*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de valeurs propres distinctes de u. Si $r = 0$, $n = 0$ et il n'y a rien à faire. Sinon, on applique d'abord

le théorème 6.1 avec $P_1(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}$. On en déduit une décomposition $E = E_1 \oplus E_2'$ avec $E_2' = \ker P_2$ et P_2 égal au quotient de P par P_1.
La restriction $(u - \lambda_1 \mathrm{Id})_{|E_1}$ est, par construction, un endomorphisme nilpotent puisque E_1 est le noyau de $(u-\lambda_1\mathrm{Id})^{m_1}$. L'espace E_2' est stable par u. La restriction $u_{|E_2'}$ a P_2 pour polynôme caractéristique (d'après la proposition 2.4), qui a $r-1$ racines distinctes. Par hypothèse de récurrence, le corollaire est vérifié pour $u_{|E_1'}$ dans $\mathrm{End}(E_1')$. On en déduit que

$$\dim(E_1') = m_2 + \cdots + m_r = n - m_1$$

et donc $\dim(E_1) = m_1$, puisque $n = \sum_{i=1}^r m_i$. $\square$

Exercice 6.4. Prouver le corollaire en utilisant l'exercice 6.2.

Il nous reste maintenant à rassembler les résultats précédents avec ceux concernant les endomorphismes nilpotents pour obtenir ce qui suit. On rappelle que la restriction $(u-\lambda_i\mathrm{Id})_{|E_i}$ au sous-espace caractéristique de λ_i est un endomorphisme nilpotent. On peut donc lui appliquer le théorème 5.4 pour obtenir :

Théorème 6.5 (Jordan)**.** *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur k et u un endomorphisme de E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur k en*

$$\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{m_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^r m_i = n.$$

où les valeurs propres λ_i, $1 \le i \le r$ sont deux à deux distinctes.
Chaque terme de la décomposition en sous-espaces caractéristiques

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

se décompose à son tour en une somme directe de sous-espaces stables par u

$$E_i = \bigoplus_{j=1}^{s_i} E_{i,j}$$

où la restriction $(u-\lambda_i\mathrm{Id})_{|E_{i,j}}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice égal à la dimension de $E_{i,j}$.

Appelons bloc de Jordan de taille N et de valeur propre λ la matrice de $\mathcal{M}_N(k)$, triangulaire supérieure, décrite par :

$$J_{\lambda,N} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On appellera matrice de Jordan toute matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan.

Le théorème précédent est alors équivalent à l'énoncé qui suit.

Théorème 6.6 (Forme normale de Jordan)**.** *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(k)$. On suppose que le polynôme caractéristique* $\det(A - X\mathrm{I}_n)$ *est scindé sur k en*

$$(-1)^n \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{m_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^r m_i = n.$$

où les λ_i, $1 \le i \le r$ sont deux à deux distincts.
Il existe alors une matrice inversible P de $\mathrm{GL}_n(k)$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1,N_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_1,N_{1,2}} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & J_{\lambda_r,N_{r,s_r}} \end{pmatrix}$$

où pour $1 \le i \le r$ et $1 \le j \le s_i$, le bloc diagonal $J_{\lambda_i,N_{i,j}}$ est un bloc de Jordan de taille $N_{i,j}$ et de valeur propre λ_i. Pour $1 \le i \le r$, on a $\sum_j N_{i,j} = m_i$ et on impose $N_{i,1} \ge N_{i,2} \ge \cdots \ge N_{i,s_i}$. L'entier $N_{i,1} = N_i$ est la multiplicité de λ_i comme racine du polynôme minimal.

Remarque. La matrice de Jordan $P^{-1}AP$, donnée par le théorème, est triangulaire supérieure, puisque les blocs de Jordan le sont. Sur la diagonale figurent les valeurs propres, avec la multiplicité qu'elles ont dans le polynôme caractéristique, et les coefficients de la diagonale secondaire $\{(i,j), j = i+1\}$ sont égaux à 1 ou 0. Tous les autres coefficients sont nuls.
Les valeurs propres étant données et indexées, la matrice de Jordan est entièrement déterminée par la donnée des entiers $N_{i,1} \ge N_{i,2} \ge \cdots \ge N_{i,s_i}$, $1 \le i \le r$. À une matrice A dont le polynôme caractéristique est scindé correspond donc, une fois les valeurs propres indexées, une *unique* matrice de Jordan qu'on appelle *forme normale de Jordan* de la matrice A.
Vérifier qu'il existe une matrice Q de $\mathrm{GL}_n(k)$ telle que $A' = Q^{-1}AQ$ (on dit que A et A' sont dans la même classe de conjugaison sous $\mathrm{GL}_n(k)$) si et seulement si A et A' ont même forme normale de Jordan. C'est ce qui justifie le terme *forme normale.*
Considérons maintenant un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé. Le théorème montre qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est sous forme normale de Jordan. Une fois indexées les valeurs propres de u, cette matrice est uniquement déterminée par u, même si la base dans laquelle elle est la matrice de u n'est pas forcément unique.

Exercice 6.7. Déterminer toutes les bases de E, espace vectoriel de sur k, dans lesquelles la matrice d'une homothétie est sous forme normale de Jordan. Même question avec l'endomorphisme de l'exemple 1.3.1.

Exercice 6.8. On reprend l'endomorphisme de l'exercice 3.12 avec $P(X) = (X+1)(X-1)^2$ et on suppose d'abord que k n'est pas de caractéristique 2. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u (induit par la multiplication par X) est donc $-P$ et le polynôme minimal P. Déterminer les noyaux des endomorphismes $u+\mathrm{Id}$ et $(u-\mathrm{Id})^2$. En déduire que la forme normale de Jordan de la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expliciter une base (resp. toutes les bases) de E dans laquelle la matrice de u est de cette forme. Que dire si la caractéristique de k est 2 ?

Théorème 6.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur k et u un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(1) *u est diagonalisable.*
(2) *Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur k et pour toute valeur propre λ la dimension de l'espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_u.*
(3) *Le polynôme minimal m_u est scindé sur k et à racines simples.*
(4) *Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur k et à racines simples.*

Démonstration. L'équivalence de (1) et (2) fait l'objet du corollaire 2.5. La condition (3) entraîne clairement (4). Supposons (4) satisfaite pour un polynôme P. Comme m_u divise P, il est également scindé à racines simples et χ_u est aussi scindé, d'après la proposition 2.4. En considérant la forme normale de Jordan de la matrice de u, on voit que, pour toute valeur propre λ, la dimension de l'espace propre est égale au nombre de blocs de Jordan de valeur propre λ. Cette dimension est égale à la dimension de l'espace caractéristique si et seulement si tous les blocs en question sont de taille 1, c'est-à-dire N_λ=1. □

Corollaire 6.10. *La restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable est aussi diagonalisable.*

Démonstration. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u. Puisque $m_u(u)$ est l'endomorphisme nul, sa restriction à F est aussi nulle. On en déduit que m_u est un polynôme annulateur de la restriction $u_{|F}$ et la conclusion, puisque $u_{|F}$ vérifie l'assertion (4) du théorème. □

Proposition 6.11. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur k et u, v deux endomorphismes diagonalisables de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *u et v commutent : $u \circ v = v \circ u$.*
(2) *Il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonales.*

Démonstration. Soit $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$ la décomposition de E en sous-espaces propres de u. Supposons que $u \circ v = v \circ u$. On a alors, pour tout vecteur x de E_λ,

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ce qui montre que $v(x)$ est soit nul, soit un vecteur propre de u de valeur propre λ. Dans les deux cas c'est un élément de E_λ qui est donc stable par v.
La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable étant aussi diagonalisable (corollaire 6.10), il existe une base de E_λ dans laquelle la matrice de $v_{|E_\lambda}$ est diagonale.
En réunissant toutes les bases obtenues pour toutes les valeurs propres de u, on en déduit l'assertion (2).
Vérifier la réciproque. □

7. Décomposition de Dunford

Le problème est le suivant : étant donné un endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé sur k, trouver une décomposition $u = s_u + n_u$ où s_u est diagonalisable, n_u nilpotent et commute avec s_u.
On remarque que la réduction de Jordan fournit une solution. Dans une base $\mathcal{B}$ où la matrice de u est une matrice de Jordan J_u on écrit

$$J_u = S_u + W_u$$

où S_u est la matrice diagonale qui a pour termes diagonaux ceux de J_u et où $W_u = J_u - S_u$ est donc triangulaire supérieure à termes diagonaux nuls, en particulier nilpotente. Notons que S_u et W_u sont aussi des matrices de Jordan.
On note s_u (resp. n_u) l'endomorphisme de matrice S_u (resp. N_u) dans la base $\mathcal{B}$.

Lemme 7.1. *Les endomorphismes s_u et n_u sont des polynômes en u. Ils commutent donc.*

Démonstration. Dans la décomposition de E en sous-espaces caractéristiques de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

les projecteurs sont des polynômes en u (théorème 6.1) que nous notons pr_i. L'endomorphisme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{pr}_i$$

est donc lui aussi un polynôme en u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est S_u. On voit donc que s_u est un polynôme en u. Comme $n_u = u - s_u$ c'est aussi un polynôme en u. □

Montrons que la solution trouvée est unique : soit $u = s + w$ une solution. On a $s_u - s = w - n_u$. Comme s commute avec w, il commute avec $s + w = u$, donc avec tout polynôme en u. Il existe donc une base dans laquelle les matrices de s_u et s sont simultanément diagonales. Dans cette base, $s_u - s$ est diagonale de même que $w - n_u$. Or w commute avec s donc avec $u = w + s$, donc avec tout polynôme en u, en particulier avec n_u. La formule du binôme de Newton est donc valide

$$(w - n_u)^N = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \binom{N}{j} {n_u}^j \, w^{N-j}$$

et donne un résultat nul dès que N est plus grand que la somme des deux indices de nilpotence de w et n_u. Il en résulte que $w - n_u = s_u - s$ est nilpotent et diagonalisable à la fois, donc nul.
On a donc démontré :

Théorème 7.2 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur k dont le polynôme caractéristique est scindé sur k. Il existe une décomposition unique de u en*

$$u = s_u + n_u$$

avec s_u diagonalisable et n_u nilpotent qui commute avec s_u.

Corollaire 7.3 (Calcul des puissances d'un endomorphisme)**.** *Une fois donnée la décomposition de Dunford $u = s_u + n_u$, on a, si N est l'indice de nilpotence de n_u :*

$$u^\ell = (s_u + n_u)^\ell = \sum_{j=0}^{\min(N-1,\ell)} \binom{\ell}{j} {s_u}^{\ell-j} \, {n_u}^j$$

pour tout ℓ entier.

Corollaire 7.4. *Supposons $k = \mathbf{R}$ ou $k = \mathbf{C}$. L'exponentielle d'un endormorphisme est alors définie et l'on a*

$$\exp(u) = \exp(s_u) \exp(n_u)$$

avec, si N est l'indice de nilpotence de n_u :

$$\exp(n_u) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j\,!} (n_u)^j.$$