Formes bilinéaires et quadratiques

Formes sesquilinéaires et hermitiennes.

8. Définitions et premières propriétés

On considère un corps k, de caractéristique différente de 2, et un espace vectoriel E sur k de dimension quelconque.

Définition 8.1. *On appelle forme bilinéaire sur E une application*

$$b : E \times E \longrightarrow k$$

telle que,

(1) *pour tout $x \in E$, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcl} b_x : E & \longrightarrow & k \\ y & \longmapsto & b(x,y) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

(2) *pour tout $y \in E$, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcl} b_y : E & \longrightarrow & k \\ x & \longmapsto & b(x,y) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

On dit que b est symétrique *si $b(x,y) = b(y,x)$ pour tous x et y dans E.*
À toute forme bilinéaire sur E est associée une forme quadratique

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & k \\ x & \longmapsto & b(x,x) \end{array}$$

Pour tous x, y de E et λ dans k, on a donc

$$q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

et

$$\begin{aligned} q(x+y) &= b(x+y, x+y) \\ &= q(x) + q(y) + b(x,y) + b(y,x). \end{aligned}$$

Réciproquement, toute forme quadratique q sur E provient d'une seule forme bilinéaire symétrique : celle déterminée, lorsque la caractéristique de k n'est pas 2, par la formule :

$$2b(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

ou aussi bien par

$$4b(x,y) = q(x+y) - q(x-y).$$

On l'appelle parfois la *forme polaire* de la forme quadratique.
L'ensemble des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques) sur E est un espace vectoriel sur k. L'ensemble des formes quadratiques sur E est un k-espace vectoriel canoniquement isomorphe à celui des formes bilinéaires symétriques.

Restriction. La restriction d'une forme bilinéaire (resp. d'une forme quadratique) à un sous-espace vectoriel F de E est *toujours* une forme bilinéaire (resp. une forme quadratique) sur F.

Exemple 8.1.1. Considérons $E = k$. L'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & k \\ x & \longmapsto & q(x) = x^2 \end{array}$$

est une forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rcl} b : E \times E & \longrightarrow & k \\ (x,y) & \longmapsto & b(x,y) = xy \end{array}$$

Exemple 8.1.2. On considère ici $E = k^2$. L'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & k \\ x = (x_1, x_2) & \longmapsto & q(x) = x_1 x_2 \end{array}$$

est une forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rcl} b : E \times E & \longrightarrow & k \\ (x,y) & \longmapsto & b(x,y) = \dfrac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{array}$$

La restriction de q à $\mathrm{Vect}(e_1)$ (resp. $\mathrm{Vect}(e_2)$) est nulle. La restriction à $\mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ est la forme quadratique de l'exemple 8.1.1.

Exemple 8.1.3. Considérons $k = \mathbf{R}$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle compact $[0,1]$. L'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & k \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \end{array}$$

est une forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rcl} b : E \times E & \longrightarrow & k \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$

Exercice 8.2. Toujours avec $k = \mathbf{R}$, considérons l'ensemble $E = \ell^2(\mathbf{R})$ des suites de réels de carré sommable. Autrement dit, un élément de E est une suite $u := (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty$.

Soit N un entier. Considérer $\lambda \longmapsto \sum_{n=0}^{N}(u_n+\lambda v_n)^2$ et prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n=0}^{N} u_n v_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} u_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n^2\right)$$

En déduire que $\ell^2(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} q : E & \longrightarrow & k \\ u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \end{array}$$

est une forme quadratique sur E associée à la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rcl} b : E \times E & \longrightarrow & k \\ (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \end{array}$$

Exemple 8.2.1. Considérons $k=\mathbf{R}$ et un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. L'espace des vecteurs de $\mathcal{E}$ est donc un espace vectoriel euclidien E, muni d'un produit scalaire noté $\langle \mid \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\| \|$.
On fixe un point O dans $\mathcal{E}$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} q_A : E & \longrightarrow & k \\ \vec{v} & \longmapsto & \langle \overrightarrow{OA} \mid \vec{v} \rangle^2 \end{array}$$

Vérifier que, lorsque $\|\vec{v}\|=1$, $\|\overrightarrow{OA}\|^2 - q_A(\vec{v})$ exprime la distance du point A à la droite définie par le point O et le vecteur directeur $\vec{v}$ (voir Exercice 3, Feuille 4).

8.3. **Dualité. Noyau.** Soit b une forme bilinéaire symétrique. On en déduit une application

$$\begin{array}{rcl} \phi_b : E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & (y \longmapsto b(x,y)) \end{array}$$

qui associe à tout vecteur x de E, l'application partielle $y \longmapsto b(x,y)$, qui est bien une forme linéaire sur E.
On appelle *noyau* de la forme bilinéaire symétrique b (resp. de la forme quadratique associée) le noyau de l'application ϕ_b. C'est le sous-espace vectoriel des vecteurs x de E :

$$\ker b := \{x \in E, \forall y \in E, b(x,y)=0\}.$$

Lorsque le noyau de b est réduit à $\{0\}$, l'application ϕ_b est injective. On dit alors que b est *non-dégénérée*. Si une forme linéaire $f \in E^*$ est l'image par ϕ_b d'un vecteur x, on dira qu'elle est *représentée* par x (via b). Si tel est le cas, pour tout y de E on a

$$f(y) = b(x,y)$$

Si de plus E est de dimension finie, alors ϕ_b est un isomorphisme entre E et E^*. Toute forme linéaire est représentée par un vecteur de E. C'est un cas très important. On y revient au paragraphe 8.7.

8.4. **Matrice d'une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie.** Dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n sur k. On se donne une forme quadratique q de forme polaire b. Si $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, on désigne par $a_{i,j}$ la valeur de $b(e_i,e_j)$ pour $1 \leq i,j \leq n$. Pour tous vecteurs x et y de E, de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc, par bilinéarité :

$$\begin{aligned} b(x,y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y) &= \sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i,y) \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j b(e_i,e_j) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i a_{i,j} y_j. \end{aligned}$$

Par suite :

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i a_{i,j} x_j.$$

On considère donc la matrice A de $\mathcal{M}_n(k)$ de coefficients $a_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$, que l'on appelle la matrice de b (resp. q) dans la base $\mathcal{B}$. C'est une matrice symétrique : ${}^tA = A$.
Si X (resp. Y) désigne la matrice des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, les égalités précédentes s'expriment par les égalités entre matrices :

$$b(x,y) = {}^tXAY, \quad q(x) = {}^tXAX.$$

Exercice 8.5. Montrer que l'espace des formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie n sur k ($\mathrm{car}(k) \neq 2$) est un espace vectoriel sur k de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

8.6. **Changement de base.** Si $\mathcal{B}'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ est une autre base de E, nous notons X' (resp. Y', A') la matrice de x (resp. y, b) dans la base $\mathcal{B}'$. Comme dans (1.7), on construit la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On a

$$X = PX' \text{ et } Y = PY'$$

Par unicité de la matrice de b ou q dans la base $\mathcal{B}'$ on a

$$A' = {}^tPAP.$$

Bien noter, qu'en général, ${}^tP$ est différente de P^{-1}. Ce qui veut dire que si, dans une base $\mathcal{B}$, un endomorphisme u a même matrice qu'une forme quadratique q, il n'en sera pas nécessairement de même dans une autre base $\mathcal{B}'$.

8.7. **Dualité en dimension finie, rang.** Munissons E^* de la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$. La matrice de l'application ϕ_b dans les bases $\mathcal{B}$ à la source et $\mathcal{B}^*$ au but, est encore la matrice A. On voit donc que b est non-dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est inversible.

Le déterminant de la matrice de b *n'est pas invariant* par changement de base (noter cependant que le signe du déterminant est conservé). En revanche, son rang est, lui, invariant. C'est le rang de l'application ϕ_b. On l'appelle le rang de la forme bilinéaire b (resp. de la forme quadratique associée).
Lorsque b est non dégénérée, (*i.e.* de rang n, *i.e.* de noyau réduit à $\{0\}$), l'application ϕ_b est un isomorphisme entre E et E^*. Toute forme linéaire est représentée par un vecteur de E via b.

Exemple 8.7.1. Soit E un espace euclidien de dimension finie n sur $\mathbf{R}$. Le produit scalaire est une forme bilinéaire non dégénérée sur E. Via le produit scalaire, toute forme linéaire sur E est représentée par un vecteur de E. Par exemple, une forme linéaire nulle sur un hyperplan de E est représentée par un vecteur normal à l'hyperplan.

Il ne faut pas croire que toute forme non dégénérée est type précédent. Un exemple célèbre est le suivant :

Exemple 8.7.2. On désigne par (t, x, y, z) les coordonnées dans la base canonique d'un vecteur de $\mathbf{R}^4$. Soit c un nombre réel positif non nul. Considérons alors la forme de Minkowski :

$$q : (t, x, y, z) \longmapsto c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Sa matrice est diagonale, de rang 4, avec $c^2, -1, -1, -1$ comme éléments diagonaux. Vérifier qu'une forme linéaire f sur $\mathbf{R}^4$ décrite dans la base canonique par :

$$f : (t, x, y, z) \longmapsto \omega t + \alpha x + \beta y + \gamma z$$

est alors représentée, via la forme de Minkowski, par le vecteur $(\frac{1}{c^2}\omega, -\alpha, -\beta, -\gamma)$.

9. Formes sesquilinéaires et hermitiennes

Dans ce paragraphe, le corps k est celui des complexes $\mathbf{C}$ et E est un espace vectoriel complexe de dimension quelconque. Pour tout nombre complexe z, on notera $\Re(z)$ (resp. $\Im(z)$) sa partie réelle (resp. partie imaginaire).

Définition 9.1. *On appelle forme sesquilinéaire sur E une application*

$$b : E \times E \longrightarrow \mathbf{C}$$

telle que,

(1) *pour tout $x \in E$, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcl} b_x : E & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ y & \longmapsto & b(x, y) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

(2) *pour tout $y \in E$, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcl} b_y : E & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & b(x, y) \end{array}$$

est une forme antilinéaire sur E, c'est-à-dire, pour tous x, x' dans E et λ dans $\mathbf{C}$

$$\begin{array}{rcl} b_y(x + x') & = & b_y(x) + b_y(x') \\ b_y(\lambda x) & = & \bar{\lambda} b_y(x) \end{array}$$

On dit que b est à symétrie hermitienne *ou simplement* hermitienne *si $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$ pour tous x et y dans E. À toute forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E est associée une forme quadratique hermitienne*

$$\begin{array}{rcl} h : E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & b(x, x) \end{array}$$

À cause de la symétrie hermitienne de b, $h(x) = b(x, x) = \overline{b(x, x)} = \overline{h(x)}$. Une forme hermitienne est donc à *valeurs réelles.*
Pour tous x, y de E et λ de $\mathbf{C}$, on a donc

$$h(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 h(x)$$

et

$$\begin{aligned} h(x + y) &= b(x + y, x + y) \\ &= h(x) + h(y) + b(x, y) + b(y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x + iy) &= b(x + iy, x + iy) \\ &= h(x) + h(y) + i(b(x, y) - b(y, x)) \end{aligned}$$

Réciproquement, toute forme quadratique hermitienne h sur E provient d'une seule forme sesquilinéaire hermitienne : celle déterminée par la formule :

$$4b(x, y) = h(x + y) - h(x - y) - i(h(x + iy) - h(x - iy)).$$

On l'appelle la *forme polaire* de la forme quadratique hermitienne.
L'ensemble des formes hermitiennes sur E est stable par addition et par multiplication par un réel (mais pas, en général, par un complexe non réel). C'est donc un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. L'ensemble des formes quadratiques hermitiennes lui est canoniquement isomorphe.

9.2. **Dualité. Noyau.** Soit b une forme hermitienne. On en déduit une application

$$\begin{array}{rcl} \phi_b : E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & (y \longmapsto b(x, y)) \end{array}$$

qui associe à tout vecteur x de E, l'application partielle $y \longmapsto b(x, y)$, qui est bien une forme linéaire sur E. L'application ϕ_b est, cette fois, *antilinéaire.* Comparer avec ce qui a été fait au paragraphe 8.3. On définit le noyau de ϕ_b

$$\ker b := \{x \in E, \forall y \in E, b(x, y) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel complexe de E (le vérifier, en prenant garde que ϕ_b est seulement antilinéaire). Lorsque le noyau de b est réduit à $\{0\}$, l'application ϕ_b est injective. On dit alors que b est *non-dégénérée.* Si une forme linéaire $f \in E^*$ est l'image par ϕ_b d'un vecteur x, on dira qu'elle est *représentée* par x (via b). Si tel est le cas, pour tout y de E on a

$$f(y) = b(x, y)$$

Si de plus E est de dimension finie, alors ϕ_b est un anti-isomorphisme entre E et E^*, c'est-à-dire une bijection anti-linéaire. Toute forme linéaire est représentée par un unique vecteur de E.

9.3. **Matrice d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.** Dans ce paragraphe, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n sur $\mathbf{C}$. On se donne une forme quadratique h de forme polaire b. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on désigne par $a_{i,j}$ la valeur de $b(e_i, e_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Pour tous vecteurs x et y de E, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a donc, par sesquilinéarité :

$$b(x, y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \bar{x}_i a_{i,j} y_j.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} h(x) = b(x, x) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \bar{x}_i a_{i,j} x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Re(a_{i,j}\, \bar{x}_i\, x_j). \end{aligned}$$

On considère donc la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, que l'on appelle la matrice de b (resp. q) dans la base $\mathcal{B}$. On notera A^* la matrice $\overline{{}^tA}$. On l'appelle matrice adjointe de A. La matrice d'une forme hermitienne vérifie donc : $\overline{{}^tA} = A$. On dit que c'est une *matrice hermitienne*.
Si X (resp. Y) désigne la matrice des coordonnées de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, les égalités précédentes s'expriment par les égalités entre matrices :

$$b(x, y) = X^* A Y, \quad h(x) = X^* A X.$$

Exercice 9.4. Montrer que l'espace des formes hermitiennes sur un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n^2.

Exercice 9.5. **Changement de base** Montrer que si la matrice de h dans une base $\mathcal{B}$ de E est A, sa matrice dans une base $\mathcal{B}'$ est

$$A' = P^* A P$$

si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Le déterminant de la matrice de b *n'est pas invariant* par changement de base. Mais c'est toujours un *nombre réel* dont le *signe* est conservé par changement de base (le vérifier). En revanche, son rang est, lui, invariant. On l'appelle le rang de la forme sesquilinéaire b (resp. de la forme hermitienne associée).

Lorsque b est non dégénérée, (*i.e.* de rang n, *i.e.* de noyau réduit à $\{0\}$), l'application ϕ_b est une bijection anti-linéaire entre E et E^*. Toute forme linéaire est représentée par un vecteur de E via b.

Exemple 9.5.1. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}$ de dimension 1 sur $\mathbf{C}$ et la forme hermitienne

$$h : z \longmapsto |z|^2$$

associée à la forme sesquilinéaire

$$b : (z, t) \longmapsto \bar{z}t.$$

Vérifier que $\beta := \Re(b)$ est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire symétrique sur $\mathbf{C}$ considéré comme espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$. Montrer que β est définie positive. Quelle est la forme quadratique associée à β ?
Vérifier que $\alpha := \Im(b)$ est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire antisymétrique sur $\mathbf{C}$ considéré comme espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Généraliser ce qui précède à $\mathbf{C}^n$.

10. Réduction de Gauss et théorème d'inertie

Vérifier qu'en dimension 1, toutes les formes quadratiques sont proportionnelles.

10.1. **Le cas de la dimension 2.** On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. Dans cette base une forme quadratique est décrite par les trois éléments $\alpha := q(e_1)$, $\beta := b(e_1, e_2)$, $\gamma := q(e_2)$ de k. La matrice de q s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Pour tout vecteur x de E, de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$, on a donc :

$$q(x) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2.$$

Supposons que l'un des deux nombres $q(e_1)$ ou $(q(e_2)$, par exemple $q(e_1)$, n'est pas nul. On écrit alors $q(x)/\alpha$ comme le début du carré de $(x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2)$:

$$q(x) = \alpha \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 \right)^2 + \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha} x_2^2,$$

ce qui prouve que $q(x)$ s'écrit

$$q(x) = \alpha_1 (\ell_1(x))^2 + \alpha_2 (\ell_2(x))^2$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires indépendantes dans E^* (le vérifier).
Supposons maintenant que $q(e_1) = q(e_2) = 0$. Le procédé précédent ne peut s'appliquer. On a cependant :

$$q(x) = 2\beta x_1 x_2 = \frac{\beta}{2} \left((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \right).$$

À nouveau, $q(x)$ s'écrit

$$q(x) = \alpha_1 (\ell_1(x))^2 + \alpha_2 (\ell_2(x))^2$$

où ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires indépendantes dans E^* (le vérifier).

Proposition 10.2. *Soient k un corps de caractéristique différente de 2, E un espace vectoriel de dimension 2 sur k et q une forme quadratique sur E.*
On peut trouver deux formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2, indépendantes dans E^*, telles que

$$q(x) = \alpha_1(\ell_1(x))^2 + \alpha_2(\ell_2(x))^2$$

Les coefficients α_1 et α_2 sont tous deux non nuls si et seulement si $\mathrm{rg}(q) = 2$, tous les deux nuls si et seulement si $q = 0$ et un seul des deux nul si et seulement si $\mathrm{rg}(q) = 1$.

Démonstration. La seule chose qui reste à prouver est la dernière assertion. Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendantes,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \ell_1(x) \\ x'_2 &= \ell_2(x) \end{aligned}$$

est un changement de coordonnées. On sait que, par un tel changement de base, le rang de la forme quadratique est invariant. D'où le résultat. □

Le résultat de la proposition se généralise aisément :

Théorème 10.3 (Réduction de Gauss)**.** *Soient k un corps de caractéristique différente de 2, E un espace vectoriel de dimension n sur k et q une forme quadratique sur E.*
On peut trouver n formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$, indépendantes dans E^*, telles que

$$q(x) = \alpha_1(\ell_1(x))^2 + \cdots + \alpha_n(\ell_n(x))^2$$

Le nombre de coefficients α_i non nuls est le rang de la forme quadratique.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension n de E. Si $q = 0$ il n'y a rien à faire.
Sinon, supposons d'abord que l'un des $q(e_i)$, $1 \leq i \leq n$ n'est pas nul, par exemple $q(e_1) = a_{1,1}$. On écrit $q(x)/a_{1,1}$ comme le début du carré de $(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} x_i)$, ce qui donne :

$$q(x) = a_{1,1}\left(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} x_i\right)^2 + q_1(x)$$

où q_1 est une forme quadratique qui ne dépend que de $(x_2, \dots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, on peut la décomposer en

$$q_1(x) = \sum_{i=2}^n \alpha_i(\ell_i(x))^2.$$

Pour conclure dans ce cas, il suffit de constater que ℓ_1 n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\ell_2, \dots, \ell_n)$ puisque elle dépend de x_1 qui n'apparaît dans aucune des ℓ_i, $2 \leq i \leq n$.
Si tous les $q(e_i)$, $1 \leq i \leq n$ sont nuls et q non nulle, c'est que $n \geq 2$: on a alors au moins un des $b(e_i, e_j)$, $i < j$ qui ne l'est pas, par exemple $b(e_1, e_2) = a_{1,2}$.
On écrit alors $q(x)$ comme le début du produit

$$2a_{1,2}\left(x_1 + \sum_{i=3}^n \frac{a_{2,i}}{a_{1,2}} x_i\right)\left(x_2 + \sum_{i=3}^n \frac{a_{1,i}}{a_{1,2}} x_i\right).$$

La différence entre $q(x)$ et le produit est est une forme quadratique qui ne dépend que de $(x_3, \dots, x_n)$. Terminer la preuve en s'inspirant du cas $n = 2$. □

Donnons une formulation matricielle de l'énoncé précédent :

Théorème 10.4. *On travaille sur un corps k de caractéristique différente de 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ une matrice symétrique. Il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que ${}^tPAP$ est diagonale.*

10.5. **Loi d'inertie.** On choisit maintenant $k = \mathbf{R}$. On dira qu'une forme quadratique est *positive* (resp. négative) si elle ne prend que des valeurs positives ou nulles (resp. négatives ou nulles) sur E. On dira qu'elle est *définie positive*(resp. définie négative) si elle est positive (resp. négative) et si elle ne s'annule qu'en 0.

Exercice 10.6. Montrer qu'une forme quadratique définie positive est non-dégénérée.

Lorsque $k = \mathbf{R}$ tout élément positif a une racine carrée. On en déduit le

Théorème 10.7 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbf{R}$.*
On peut trouver n formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$, indépendantes dans E^*, telles que

$$q(x) = -\sum_{j=1}^s (\ell_j(x))^2 + \sum_{i=s+1}^r (\ell_i(x))^2$$

où r est le rang de la forme q. L'entier s ne dépend pas du système de formes linéaires qui réalise la décomposition. Le couple $(s, r-s)$ est appelé signature *de la forme quadratique.*

Démonstration. L'existence est claire puisque $k = \mathbf{R}$. Reste l'unicité. Supposons donc l'existence de deux décompositions de q l'une

$$q(x) = -\sum_{j=1}^s (\ell_j(x))^2 + \sum_{i=s+1}^r (\ell_i(x))^2,$$

l'autre

$$q(x) = -\sum_{j=1}^{s'} (\ell'_j(x))^2 + \sum_{i=s'+1}^r (\ell'_i(x))^2$$

avec $s' > s$.
Il existe alors un même système de $n - r$ formes linéaires $(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n)$ qui complète à la fois les systèmes libres $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ et $(\ell'_1, \dots, \ell'_r)$ en deux bases de E^*.

La restriction de la forme q au sous-espace vectoriel F d'équations

$$\ell_1 = \ldots = \ell_s = 0 = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n$$

est définie positive. F est l'orthogonal de

$$\mathrm{Vect}(\ell_1, \ldots, \ell_s, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \subset E^*,$$

il donc de dimension $r - s$.
La forme q est définie négative sur le sous-espace vectoriel F' d'équations

$$\ell_{s'+1} = \ldots = \ell_r = 0 = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n$$

qui est l'orthogonal de

$$\mathrm{Vect}(\ell_{s'+1}, \ldots, \ell_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n) \subset E^*,$$

donc de dimension s'.
Désignons par G l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$. Il est de dimension r. La somme des dimensions $\dim F + \dim F'$ vaut $r + s' - s > r$. Comme F et F' sont des sous-espaces de G, leur intersection est de dimension positive. Sur cette intersection, q est à la fois définie positive et definie négative, ce qui est contradictoire. $\square$

Exercice 10.8. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{C}$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit h une forme hermitienne sur E. Pour tout vecteur x de E, de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$h(x) = \alpha|x_1|^2 + 2\Re(\beta\bar{x}_1 x_2) + \gamma|x_2|^2.$$

avec α et γ réels.
La matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$$

On suppose $\alpha \neq 0$. Écrire $h(x)/\alpha$ comme le début du carré de $|x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2|$ et montrer que

$$h(x) = \alpha|x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2|^2 + \frac{\alpha\gamma - |\beta|^2}{\alpha}|x_2|^2.$$

On suppose maintenant que $\alpha = \gamma = 0$. Montrer que

$$h(x) = 2\Re(\beta\bar{x}_1 x_2) = \frac{1}{2}\left(|x_1 + \beta x_2|^2 - |x_1 - \beta x_2|^2\right).$$

À la suite de l'exercice ci-dessus, adapter les démonstrations de la réduction de Gauss et de la loi d'inertie au cas des formes quadratiques hermitiennes pour prouver le :

Théorème 10.9 (Loi d'inertie pour les formes hermitiennes)**.** *Soit h une forme hermitienne sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbf{C}$. On peut trouver n formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_n$, indépendantes dans E^*, telles que*

$$q(x) = -\sum_{j=1}^{s} |\ell_j(x)|^2 + \sum_{i=s+1}^{r} |\ell_i(x)|^2$$

où r est le rang de la forme q. L'entier s ne dépend pas du système de formes linéaires qui réalise la décomposition.

Le couple $(s, r - s)$ est appelé signature *de la forme hermitienne.*

Exercice 10.10. On considère l'espace $E = \mathbf{C}^2$ muni du produit scalaire hermitien canonique et la forme

$$\begin{array}{rcl} h : E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z = (z_1, z_2) & \longmapsto & h(z) = \Re(z_1 \bar{z}_2). \end{array}$$

Montrer que c'est une forme hermitienne sur E. Calculer la forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne dont elle provient.
Déterminer la matrice de h dans la base canonique de E. Calculer le rang de h et sa signature. Déterminer l'ensemble des vecteurs de E qui annulent h.
Comparer avec l'exemple 8.1.2.
Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z = (z_1, z_2) & \longmapsto & \Re(z_1 z_2) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ z = (z_1, z_2) & \longmapsto & \Im(z_1 \bar{z}_2) \end{array}$$

sont-elles des formes hermitiennes sur E ?