L3 Maths 2013 : Algèbre et Géométrie — Feuille n° 1

I. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices A suivantes. Dans chaque cas trouver une matrice carrée P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. (a) Trouver toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ pour $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Pour que la même condition sur les A vérifiant $AB = BA$ pour une matrice diagonale $B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ plus générale soit nécessaire et suffisante, quelle condition faut-il imposer sur r et s ?

(c) Trouver toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ pour $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Trouver toutes les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ pour tout $B \in M_2(\mathbb{R})$.

III. Notons $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice carrée A. (Rappeler la définition de la *trace* d'une matrice carrée si nécessaire.)
Montrer que le polynôme caractéristique de $A \in M_2(\mathbb{K})$ est

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

IV. Soit $A = \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}$.

(a) Trouver une matrice carrée P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ calculer A^n.

(c) Trouver une matrice carrée B vérifiant $B^3 = A$.

(d) Trouver une matrice carrée $C \in M_2(\mathbb{C})$ vérifiant $C^2 = A$.

(e) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $C \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $C^2 = A$.

Indication : Pour les* (b)(c)(d)(e), *résoudre d'abord la question analogue où la matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ remplace A. En déduire le résultat pour A. Pour le* (e) *on peut faire intervenir l'exo* II(b) *vu que C et $C^2 = A$ devraient commuter.

V. (a) Considérons les matrices de rotation

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Diagonaliser A_θ sur $\mathbb{C}$. Montrer que A_{θ_1} et A_{θ_2} peuvent être diagonalisées simultanément.

(b) Considérons les matrices de réflexion

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Diagonaliser B_θ (préciser la matrice de passage). Quelles conditions θ_1 et θ_2 doivent-ils vérifier pour que B_{θ_1} et B_{θ_2} puissent être diagonalisées simultanément ?

VI. (a) Soit u_0, u_1 deux paramètres réels. Considérons la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui commence avec u_0 et u_1 et dont les termes suivants sont donnés par la formule de récurrence

$$u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2}, \qquad (n \geq 2).$$

Donner une forme générale pour u_n en termes de u_0, u_1 et n.
Discuter le comportement asymptotique de la suite $\{u_n\}$ pour $n \to +\infty$.

(b) *Idem* en remplaçant la formule de récurrence ci-dessus par

$$u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}, \qquad (n \geq 2).$$

(c) La suite de *nombres de Fibonacci* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$. (La suite historique commence avec $F_1 = F_2 = 1$, mais c'est souvent utile d'y ajouter $F_0 = 0$.)
Donner une formule <u>non récursive</u> pour F_n ($n \in \mathbb{N}$) qui ne dépend que de n.
Discuter le comportement asymptotique de la suite $\{F_n\}$ pour $n \to +\infty$.

Indication : Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ ***vérifiant*** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$ ***pour tout*** $n \geq 2$***. Expliquer pourquoi on a*** $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ ***pour tout*** $n \geq 1$***. Finalement calculer*** A^{n-1} ***comme dans l'exercice* III(b).**

VII. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = I_2$.

(a) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors on a $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(b) Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, et posons $\mathbf{w} = A\mathbf{v} - \mathbf{v}$. Montrer que $\mathbf{w} = A\mathbf{v} - \mathbf{v}$ est un vecteur propre (soit non trivial soit nul) de A.

(c) Montrer que les vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ engendrent $\mathbb{R}^n$.

(d) Montrer que A est diagonalisable.

VIII. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, et soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme. Supposons que le polynôme caractéristique de f est $(\lambda - a)^2$ pour un $a \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit égale à une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$