FEUILLE 2-BIS, DIAGONALISATION ET POLYNÔME MINIMAL

Exercice 1.

1- Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & a-1 \\ a-1 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme associé. 2- factorisez le polynome caractéristique de A.

3- Déterminez en fonction de a la dimension du sous-espace propre associé à a+1

A,

4- Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2.

1- Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & -a-1 & 2 \end{pmatrix};$$

2- factorisez le polynome caractéristique de A.

3-Si a est différent de -1 et 2 montrez que A est diagonalisable,

4- Si $a = 2$, montrez que A n'est pas diagonalisable

5- Pour $a = -1$, diagonaliser A.

Exercice 3.

Diagonalisez (si possible) les matrices suivantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

Exercice 4.

Pour chacune des matrices suivantes,

1- déterminez son polynome caractéristique,

2- diagonalisez si possible,

3- Calculez A^n en fonction de A^{n-1}, A^{n-2} et A^{n-3}

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Exercice 5. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1- Diagonalisez A.

2- En utilisant la forme diagonale de A, calculez les coefficients de A^n, pour $n \in \mathbb{Z}$.

3- Déterminez le polynôme minimal de A. En déduire l'expression de A^2 and fonction de A et I.

4-Déduire de la question précédente l'expression de A^n en fonction de A et A et I pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & a \end{pmatrix}.$$

1- Vérifiez que $A^2 = A + 2I$. EN déduire le polynôme minimal de A. Montrez que A est diagonalisable

2- Déterminez les sous espaces propres de A.