L3 Maths 2013 : Algèbre et Géométrie Feuille 2

I. Trigonaliser les matrices A en trouvant une matrice inversible P avec $A = PJP^{-1}$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II. On considère la matrice dans $M_3(k)$

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 2 & 0 & -2a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de M_a s'écrit sous la forme $-(\lambda - a)Q_a(\lambda) = -(\lambda - a)(\lambda^2 + r(a)\lambda + s(a))$.

(b) On suppose $k = \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est trigonalisable.

(c) On suppose $k = \mathbb{C}$. Montrer que le polynôme caractéristique de M_a admet une racine au moins double ssi soit $Q_a(\lambda)$ admet une racine double soit $Q_a(a) = 0$.
En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a admet une valeur propre au moins double.

(d) On suppose $k = \mathbb{C}$. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

(e) On suppose $k = \mathbb{C}$. Déterminer suivant les valeurs de a le polynôme minimal de M_a.

III. (a) Soit $0 \neq P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $P(X)$ n'a que des racines simples, alors tout polynôme divisant $P(X)$ n'a que des racines simples.

(b) Soit $g \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée inversible. On dit que g est *d'ordre finie dans le groupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ s'il existe un entier $r \geq 1$ avec $g^r = I$.
Montrer que g est d'ordre finie dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ssi il est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

IV. (a) Un *projecteur* est un endomorphisme $p : V \to V$ avec $p^2 = p$.
Un projecteur est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres éventuelles ?
Donner une interprétation géométrique de ses espaces propres.

(b) Une *symétrie* est un endomorphisme $s : V \to V$ avec $s^2 = \mathrm{Id}_V$.
Une symétrie est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres éventuelles ?
Donner une interprétation géométrique de ses espaces propres.

V. On considère la matrice dans $M_3(k)$

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 2 & 0 & -2a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de M_a s'écrit sous la forme $-(\lambda - a)Q_a(\lambda) = -(\lambda - a)(\lambda^2 + r(a)\lambda + s(a))$.

(b) On suppose $k = \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles M_a est trigonalisable.

(c) On suppose $k = \mathbb{C}$. Montrer que le polynôme caractéristique de M_a admet une racine au moins double ssi soit $Q_a(\lambda)$ admet une racine double soit $Q_a(a) = 0$.

En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a admet une valeur propre au moins double.

(d) On suppose $k = \mathbb{C}$. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

(e) On suppose $k = \mathbb{C}$. Déterminer suivant les valeurs de a le polynôme minimal de M_a.